單元 機率統計 II

☆　1　隨機的意義　☆

主題 1　認識隨機變數

1. 隨機試驗：

一個試驗可能有很多種不同的結果，事先無法確定會出現哪一種現象，我們稱可能出現的種種現象為「隨機現象」，而稱此試驗為「隨機試驗」

2. 樣本空間：

作一個隨機試驗，所有可能出現的結果所形成的集合，我們稱之為作此隨機試驗的「樣本空間」

3. 若隨機試驗的每種結果對應到一個數值，這樣的函數對應稱為「隨機變數」，習慣用大寫字母X、Y、Z、…來表示。隨機變數就是定義在樣本空間中的一種函數關係，數值可以任意給定，舉例如下：

(1) 擲一顆骰子，觀察所出現的點數，令X表所出現的點數，則X為一隨機變數，且X的值如下表

點數	1	2	3	4	5	6
X	1	2	3	4	5	6

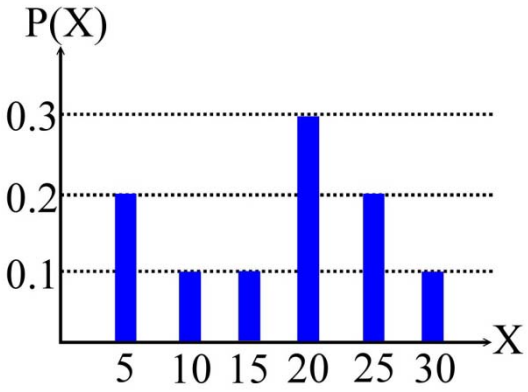
(2) 承(1)，若Y表所出現之點數的平方和，則Y亦為一隨機變數，且Y的值如下表

點數	1	2	3	4	5	6
Y	1	4	9	16	25	36

(3) 擲三枚銅板，令Z的值與所出現的正面個數的對應關係，如下表所示，則Z亦為一隨機變數，且Z之可能值為 20、50、10、100

正面個數	0	1	2	3
Z	20	50	10	100

4. 機率質量函數：



隨機試驗有了隨機變數X之後，將「X的值」對應到「X發生的機率」的函數關係，稱為「機率質量函數」，表法為$P(X=\cdots)$，如$P(X=x_i)$表「隨機變數X為x_i的機率」。針對一個機率質量函數，可以將之繪製成「長條圖」當成函數圖形，或做成表格稱之為「機率分布表」。請見下例：

X	5	10	15	20	25	30
P_X	0.2	0.1	0.1	0.3	0.2	0.1

則$P(X=5)=0.2$、$P(X=20)=0.3$、$P(X<25)=0.7$

5. 機率質量函數的性質：

若隨機變數X的取值為x_1、x_2、⋯、x_n，且其各個取值發生的機率分別為p_1、p_2、⋯、p_n，即$P(X=x_i)=P_i$，$i=1$、2、⋯、n，則：

(1) $\forall i\in\{1、2、3、\cdots、n\}$皆使$P_i\geq 0$　(即P_i為非負的實數)

(2) $\sum_{i=1}^{n}P_i=1$　(即$P_1+P_2+\cdots+P_n)=1$

例題 1　下列哪些選項是定義完善的隨機變數？

(A) 擲五枚硬幣，以正面出現的個數做為隨機變數

(B) 擲三顆不均勻的骰子，以點數和做為隨機變數

(C) 摸彩箱中有紅球、橙球、黃球、綠球各若干個，抽取一球，以球的顏色做為隨機變數

(D) 摸彩箱中有紅球、橙球、黃球、綠球各若干個，抽中紅球得 20 元，橙球得 30 元，黃球得 10 元，綠球得 5 元，抽取一球，以所得獎金做為隨機變數

(E) 重複丟擲一硬幣，直到出現正面為止，以所擲次數為隨機變數

版權所有

例題 2　下列哪些選項是定義完善的隨機變數？

(A) 從一副撲克牌中抽取一張，以點數為隨機變數

(B) 從一副撲克牌中抽取兩張，以點數和為隨機變數

(C) 從一副撲克牌中抽取兩張，以點數差隨機變數

(D) 從一副撲克牌中抽取五張，以黑桃的張數為隨機變數

(E) 從一副撲克牌中抽取兩張，以點數的同異為隨機變數

例題 3　袋中有紅球、白球、黃球三種色球，從中任取一張，依球色決定變數X的值，則下列哪些選項的對應關係滿足隨機變數的定義？

(A)

	紅球	白球	黃球
X	2	2	3

(B)

	紅球	白球	黃球
X	2	3	

(C)

	紅球	白球	黃球
X	1	-4	π

(D)

	紅球	白球	黃球
X	1	2	3或4

(E)

	紅球	白球	黃球
X	7	7	7

例題 4　盒中有紅球 2 個、黃球 2 個、白球 1 個，每球被取到的機率相等，從其中任取兩球，依球色給獎金如下表，請完成以獎金為隨機變數X的機率分布表及其函數圖

球色	均為紅球	均為黃球	一紅一黃	一黃一白	一紅一白
獎金	40 元	20 元	30 元	10 元	0 元

例題 5　隨機變數X取值的機率分配表如下，求

(1) $P(X \le 8) =$_____　　(2) $P(X > 7) =$_____

(3) $P(4 \le X < 9) =$_____

X	2	5	7	8	10
機率	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

例題 6　設 a、b 為實數，隨機變數X與Y的機率分布表如下，則數對(a, b) =_____

X	10	a+5	$-b^2$	a+b
P(X)	0.2	2a	0.4	b

Y	a	3b	π	0.4	1
P(Y)	0.1	a+b	0.2	$\frac{a}{2}$	b+0.1

例題 7　設a、b ∈ R且隨機變數X與Y之機率分布表如下：

$X=x_i$	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	a−b	a+b	0.3	0.2

$Y=y_i$	5	6	7	8
$P(Y=y_i)$	0.1	2a	0.2	3b

則數對(a, b) =_____

例題 8　設袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，今從其中任取兩球，每球被取到的機會均等，令X表所取的兩球的號碼和，Y表所取到的兩球的號碼差，試作X與Y之機率分布表與機率函數圖

主題 2　隨機變數的期望值

1. 隨機變數的期望值：

   作一隨機試驗，其樣本空間 S 共有 n 個元素，這 n 個元素的機率值依序為 p_1、p_2、p_3、⋯、p_n，設隨機變數X的取值依序為x_1、x_2、x_3、⋯、x_n，則隨機變數X的期望值為$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_nx_n$

   $=\sum_{i=1}^{n} p_ix_i = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_1) \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot x_i$

2. 我們一般也以$f(x_i)$表當$X = x_i$時之機率，即$f(x_i) = P(X = x_i)$

   如此：$f(x)$即為隨機變數X的機率質量函數

3. 隨機變數X的期望值為「各種結果的機率，乘上隨機變數的值，再全部相加所得之和」

4. 隨機變數的期望值就是「真正的平均值」

5. 隨機變數平移求期望值：

樣本空間 S 有 n 種不同結果，隨機變數X的取值依序為x_1、x_2、x_3、⋯、x_n，同加 k 所得新的隨機變數記為$X+k$，取值依序為

x_1+k、x_2+k、x_3+k、⋯、x_n+k，稱為隨機變數的平移。則$X+k$的期望值為原本X的期望值再加 k，即$E(X+k)=E(X)+k$

6. 隨機變數伸縮求期望值：

樣本空間 S 有 n 種不同結果，隨機變數X的取值依序為x_1、x_2、x_3、⋯、x_n，同乘a所得新的隨機變數記為aX，取值依序為ax_1、ax_2、ax_3、⋯、ax_n，稱為隨機變數的伸縮。則aX的期望值為原本X的期望值乘上a，即$E(aX)=a\cdot E(X)$

7. 設同一隨機試驗有兩個隨機變數X與Y，若對每種試驗結果，將兩個隨機變數的值相加，所得新的隨機變數記為$X+Y$，則由定義可推得$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

例題 9　設袋中有 50 元硬幣 3 枚、10 元硬幣 6 枚、5 元硬幣 7 枚、1 元硬幣 4 校，今從袋中任取一枚硬幣，設機率均等，則取得硬幣之幣值的期望值為_____元