

17 因數的個數

1. 設 $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, 令 $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot P_3^{\alpha_3} \cdots P_n^{\alpha_n}$ 其中 P_i 為相異質數 $\alpha_i \in \mathbb{N}$ 則

① n 之正因數個數為 $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$

② n 之正因數總和為：

$$(1 + P_1 + P_1^2 + \cdots + P_1^{\alpha_1})(1 + P_2 + P_2^2 + \cdots + P_2^{\alpha_2}) \cdots (1 + P_n + P_n^2 + \cdots + P_n^{\alpha_n})$$

2. 因數之性質

① 整線性組合：設 $a, b \in \mathbb{Z}$, 對於 $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $c = am + bn$ 稱為 a 與 b 的整線性組合

② 若 $c \mid b$ 且 $b \mid a$ 則 $c \mid a$

③ 若 $c \mid b$ 且 $c \mid a$ 則 $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, 恒有 $c \mid am + bn$

3. 倍數：連續 n 個正整數之積必為 $n!$ 之倍數

[例1] 設 $n = 8100$ 則 (1) 質因數個數 _____ 正因數個數有 _____ (2) 所有正因數之總和 _____ 所有因數的和為 _____ (3) 正因數中為 36 之倍數者有 _____ 100 的倍數者有 _____。

提示：(1)(2) 利用公式 (3) 先提出 36 再算個數

解答：(1) $n = 8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ 質因數共 3 個，正因數 $(2+1)(4+1)(2+1) = 45$ 個

(2) 正因數和 $(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 26257$

所有因數和為 0

(3) $8100 = 36[2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^2] \rightarrow 36$ 的倍數共 $1 \times 3 \times 3 = 9$ 個

$= 100[2^0 \cdot 3^4 \cdot 5^0] \rightarrow 100$ 的倍數共 $1 \times 5 \times 1 = 5$ 個

[例2] $n \in \mathbb{N}$ 且 n 之正因數有 12 個，求滿足此條件之最小 n 值

提示：將 12 分解之後考慮質因數之選擇方式

解答： $12 = 12 \times 1 = (11+1)(0+1) \rightarrow n = 2^{11} = 2048$

$= 6 \times 2 = (5+1)(1+1) \rightarrow n = 2^5 \cdot 3^1 = 96$

$= 4 \times 3 = (3+1)(2+1) \rightarrow n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

$= 3 \times 2 \times 2 = (2+1)(1+1)(1+1) \rightarrow n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \leftarrow \text{最小}$

18 整數解

1. 線性方程式：

① 條件：令 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 則 $ax+by=c$ 有整數解的充要條件為： $(a, b) \mid c$

② $a, b \in \mathbb{Z}$ ，且 $(a, b)=d$ ，則 $S=\{ax+by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ 表示所有 d 的倍數所成的集合，即 $S=\{dk \mid k \in \mathbb{Z}\}$

③ $a, b \in \mathbb{Z}$ ，且 $(a, b)=1$ 時 $ax+by=c$ 必有整數解，若 (x_0, y_0) 為其中一組解，

$$\text{則} \begin{cases} x=x_0+bt \\ y=y_0-at \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z} \text{ 亦為其一組解}$$

2. 整數解：因式分解型(見範例2)

[例1] $3x+7y=1000$ 之正整數解 (x, y) 有_____組。

提示：線性方程式之整數解須先求一般解

解答： $3x+7y=1000 \Rightarrow 3x=1000-7y=999-6y-(y-1)$

$$x=333-2y-\frac{y-1}{3} \in \mathbb{Z}, \text{ 取 } y=1 \text{ 則 } x=331$$

$$\therefore \begin{cases} x=331+7t \\ y=1-3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

$$x=331+7t > 0 \Rightarrow t > -47\frac{2}{7} \dots\dots\dots ①$$

$$y=1-3t > 0 \Rightarrow t < \frac{1}{3} \dots\dots\dots ②$$

$$\text{由①②得 } -47\frac{2}{7} < t < \frac{1}{3} \quad \text{但 } t \in \mathbb{Z}$$

$\therefore t = -47, -46, \dots\dots\dots, 0$ 故有48個組解

[例2] 若 $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $xy+y-3x-9=0$ 則 (x, y) 有_____組解

提示：二次式之整數解先因式分解

解答： $xy+y-3x-9=0 \Rightarrow x(y-3)+(y-3)-6=0 \Rightarrow (x+1)(y-3)=6$

$$\begin{cases} x+1=1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6 \\ y-3=6, 3, 2, 1, -6, -3, -2, -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, 1, 2, 5, -2, -3, -4, -7 \\ y=9, 6, 5, 4, -3, 0, 1, 2 \end{cases} \Rightarrow 8 \text{ 組解}$$

19 零多項式定理及多項式恆等定理

1. 零多項式定理：

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ，若 $f(x) = 0$ 有 $n+1$ 個相異的數 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 使 $f(x)$ 之值為 0，則 $f(x)$ 為零多項式，即 $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$

2. 多項式恆等定理：設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

若存在多於 n 個相異數 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots$

使 $f(\alpha_1) = g(\alpha_1), f(\alpha_2) = g(\alpha_2), \dots, f(\alpha_n) = g(\alpha_n), f(\alpha_{n+1}) = g(\alpha_{n+1}) \dots$ 則 $f(x) = g(x)$ 恒成立

[例1] 設 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{100} x^{100}$ 若 $f(0) = f(1) = f(2) = \dots = f(100)$

$$= 0 \text{ 則 } (A) a_0 = 0 \quad (B) a_{100} = 0 \quad (C) \sum_{k=0}^{100} a_k = 0 \quad (D) \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = 0$$

提示：零多項式定理

解答： $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{100} x^{100}$

$$f(0) = f(1) = f(2) = \dots = f(100) = 0 \quad \therefore f(x) = 0 \text{ 恒成立}$$

$$\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{100} = 0 \Rightarrow (A)(B)(C)(D)$$

[例2] 設 $f(x) = x^2, g(x) = a(x-1)^2 + b(x-2)^2 + c(x-3)^2$ 若 $f(1) = g(1), f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}), f(100) = g(100)$ 則 $ab + bc + ca = \underline{\hspace{2cm}}$

提示：多項式恆等定理

解答： $f(x) = x^2 \quad g(x) = (a+b+c)x^2 - 2(a+2b+3c)x + (a+4b+9c)$

$$f(1) = g(1) \quad f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) \quad f(100) = g(100)$$

$\therefore f(x) = g(x)$ 恒成立

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a+2b+3c=0 \\ a+4b+9c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-3 \\ c=1 \end{cases}$$

20 餘式定理及因式定理

1. 商式與餘式存在之唯一性：設 $f(x)$ ， $g(x)$ 為二多項式且 $\deg g(x) \neq 0$ 則恰有二多項式 $q(x)$ 及 $r(x)$ ，使得 $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ 其中 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 或 $r(x) = 0$ 而 $q(x)$ 稱為商式， $r(x)$ 稱為餘式
2. 餘式定理：設多項式 $f(x)$ 之次數不小於1，則以 $(x-a)$ 除 $f(x)$ 所得之餘式為 $f(a)$ ，又以 $ax-b$ 除之，餘式為 $f(\frac{b}{a})$
3. 因式定理： $x-a$ 為多項式 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(a)=0$

[例1] x 之整式 $f(x)$ 以 $ax+b(a \neq 0)$ 除之，商式為 $Q(x)$ 餘式為 R 則：

(1) $f(x)$ 以 $x+\frac{b}{a}$ 除之，商式為_____，餘式為_____。

(2) $x \cdot f(x)$ 以 $ax+b$ 除之，商式為_____，餘式為_____。

提示：(1) 除法原理。(2) 餘式之次數須低於除式之次數

解答：(1) $f(x) = (ax+b) \cdot Q(x) + R = a(x+\frac{b}{a}) \cdot Q(x) + R = (x+\frac{b}{a}) \cdot a \cdot Q(x) + R$

$\therefore$ 商式： $a \cdot Q(x)$ 餘式： R

(2) $x \cdot f(x) = (ax+b) \cdot x \cdot Q(x) + R \cdot x$

$$= (ax+b) \cdot x \cdot Q(x) + [(ax+b) \frac{R}{a} - \frac{bR}{a}]$$

$$= (ax+b) \cdot [x \cdot Q(x) + \frac{R}{a}] - \frac{bR}{a}$$

$\therefore$ 商式： $x \cdot Q(x) + \frac{R}{a}$ 餘式： $-\frac{bR}{a}$

[例2] 二次式 ax^2+bx-4 以 $x+1$ 除之，得餘數3，則 $x-1$ 除之得餘數1如以 $x-2$ 除之，則得餘數_____。

提示：利用餘式定理求 a, b

解答： $f(x) = ax^2+bx-4 \Rightarrow f(-1) = a-b-4 = 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$f(1) = a+b-4 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$ 解 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得 $a=6$ $b=-1$

則 $f(x) = 6x^2-x-4 \therefore f(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 - 4 = 18$

21 多項式的係數

多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

1. 常數項： $f(0) = a_0$

$$2. \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(1) \\ a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n = f(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{偶次項係數和：} a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)] \\ \text{奇次項係數和：} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)] \end{cases}$$

[例1] 設 $f(x) = (x^{37} - 4x^{23} + 4x^{15} - 3x^2 - 1)(x^7 - 2x^6 + 5x^3 - x + 2)$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{44}x^{44}$$

$$\text{① } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{44} \quad \text{② } a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{44} \quad \text{③ } a_1 + a_3 + \cdots + a_{43}$$

提示：求係數和利用上列公式

$$\text{解答：} f(x) = (x^{37} - 4x^{23} + 4x^{15} - 3x^2 - 1)(x^7 - 2x^6 + 5x^3 - x + 2)$$

$$= a_0 + a_1x + \cdots + a_{44}x^{44}$$

$$f(1) = (1 - 4 + 4 - 3 - 1)(1 - 2 + 5 - 1 + 2) = -15 \quad f(-1) = 25$$

$$\text{① } f(1) = -15 \quad \text{② } \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)] = 5 \quad \text{③ } \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)] = -20$$

[例2] 設 $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ ，試求 $x^3 - 3x^2 - 3x + 4$

提示：先做一個以 $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ 為一根之方程式

$$\text{解答：} x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow (x-1) = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \text{ 立方之}$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2 + 4 + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 6 + 3 \cdot 2(x-1) = 6x$$

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 5$$

22 多項式之公因式與公倍式

設 $f(x)$ ， $g(x)$ 表 x 之多項式

1. $f(x)$ 與 $g(x)$ 之公因式必為 $a(x) \cdot f(x) \pm b(x) \cdot g(x)$ 之因式
2. $f(x)$ 與 $g(x)$ 之H.C.F為 $d(x)$ 又L.C.M為 $l(x)$ 則 $f(x) \cdot g(x) = d(x) \cdot l(x)$
3. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之公因式為 $d(x)$ 則(非唯一)存在二多項式 $a(x)$ 與 $b(x)$ ，使 $a(x) \cdot f(x) + b(x) \cdot g(x) = d(x)$
4. 兩多項式 $f(x)$ $g(x)$ ，欲求H.C.F常用方法：(1) 因式分解法
(2) 輾轉相除法
(3) 削首去尾法

[例1] 設 $f(x) = x^2 + (k-6)x + 2k-1$ 與 $g(x) = x^2 + (k+2)x + 2k$ 有一次公因式存在則公因式為_____， $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

提示： $d(x) \mid a(x) \cdot f(x) \pm b(x) \cdot g(x)$

解答： $f(x) = x^2 + (k-6)x + 2k-1$ $g(x) = x^2 + (k+2)x + 2k$ ， $g(x) - f(x) = 8x + 1$

$$\therefore \text{一次因式為 } 8x+1 \text{ 又 } g\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64} - \frac{1}{8}(k+2) + 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$

[例2] 設 $k \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ， $g(x) = x^3 + k^2x^2 + 2kx - 16$ (1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 之

H.C.F為一次，則 $k = ?$ (2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 之H.C.F為二次，則 $k = ?$

提示： $f(x)$ 已知先分解 $f(x)$ H.C.F必存在 $f(x)$ 之因式之中

解答： $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$ ， $g(x) = x^3 + k^2x^2 + 2kx - 16$

(I) 若 $(x-1)$ 為公因式則 $g(1) = 1 + k^2 + 2k - 16 = 0$

$$(k+5)(k-3) = 0 \quad \therefore k = -5 \text{ 或 } 3$$

(II) 若 $x+2$ 為公因式則 $g(-2) = -8 + 4k^2 - 4k - 16 = 0 \Rightarrow k = -2 \text{ 或 } 3$

(III) 若 $x-3$ 為公因式則 $g(3) = 27 + 9k^2 + 6k - 16 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{R}$ (不合)

① H.C.F一次則 $k = -5$ 或 -2

② H.C.F二次則 $k = 3$ ，H.C.F = $(x-1)(x+2)$

23 牛頓定理(整係數多項式一次有理因式檢驗法)

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $a_n \neq 0$, 若 $f(x)$ 有一次的有理因式 $px - q$ (p, q 為互質的整數) 則 $p \mid a_n, q \mid a_0$

<推論>

1. 上述定理中; 設 $a_n = 1$ 即 $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 若 $f(x)$ 有整係數一次因式 $x - q$ 則 $q \mid a_0$
2. 設 $f(x) = (ax - b) \cdot Q(x) \quad Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$
 - ① 含 $x = 1$ 則 $f(1) = (a - b) \cdot Q(1) \quad \therefore (a - b) \mid f(1)$
 - ② 含 $x = -1$ 則 $f(-1) = -(a + b) \cdot Q(-1) \quad \therefore (a + b) \mid f(-1)$

[例1] 試證多項 $3x^3 - 3x + 1$ 不含任何有理因式 <即證明 $3x^3 - 3x + 1 = 0$ 不含任何有理根>

提示：否定之命題利用反面作法(歸謬證法)

解答：設 $f(x) = 3x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ 有有理因式，則必為 $x + 1, x - 1, 3x + 1, 3x - 1$

$$\text{但 } f(-1) = 1 \neq 0, f(1) = 1 \neq 0, f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{17}{9} \neq 0, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \neq 0$$

$\therefore (x + 1), (x - 1), (3x + 1), (3x - 1)$ 皆不為 $f(x)$ 的因式

故 $f(x)$ 不含任何有理因式(窮舉法)

[例2] 設 $p, q \in \mathbb{N}$, 若 $f(x) = x^5 - 2px^4 + x^3 - qx^2 + x - 2$ 有整係數一次因式試求 p, q 之值。

提示：有理因式利用牛頓定理檢驗

解答： $p, q \in \mathbb{N} \quad f(x) = x^5 - 2px^4 + x^3 - qx^2 + x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ (係數正負相間) 有整係數一次因式 $x - 1$ 或 $x - 2$, $f(1) = 1 - 2p + 1 - q + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 2p + q = 1$ (不合)

$$f(2) = 32 - 32p + 8 - 4q + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 32p + 4q = 40 \Rightarrow 8p + q = 10 \text{ 但 } p, q \in \mathbb{N}$$

$$\therefore p = 1 \quad q = 2$$

24 二次方程式 < I >

1. 標準式： $ax^2+bx+c=0$ ， $a, b, c \in \mathbb{R}$ ， $a \neq 0$

2. 解集合： $\left\{ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right\}$

3. 根與係數的關係：設 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根為 α 、 β ($a, b, c \in \mathbb{R}$ ， $a \neq 0$)

$$\text{則① } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{② } \alpha \beta = \frac{c}{a}$$

4. 實根與虛根的判定：設 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根為 α 、 β 判別式為 $D=b^2-4ac$

① $D > 0 \Leftrightarrow$ 有二相異實根

② $D = 0 \Leftrightarrow$ 有二相等實根

③ $D < 0 \Leftrightarrow$ 有二共軛複數根

與圖形作對照

[例1] 設 x 的二次方程式 $x^2-(k+3)x+(2k-1)=0$ 的二根都是整數則 $k=$ _____

提示：① 係數皆一次由“根與係數”著手 ② 係數有一次及二次時仿<例2>判別式為一整數之完全平方

解答： $x^2-(k+3)x+(2k-1)=0$ 之二根為 α 、 β

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k+3 & \cdots \cdots \text{①} \\ \alpha \beta = 2k-1 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases} \quad \therefore (\alpha-2)(\beta-3) = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-2 = -1, 1, -3, 3 \\ \beta-3 = 3, -3, 1, -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, 3, -1, 5 \\ \beta = 5, -1, 3, 1 \end{cases} \quad \text{代入①得 } k=3 \text{ 或 } -1$$

[例2] 設 $m, k \in \mathbb{Q}$ ，若不論 m 為何值，方程式 $x^2-4mx+4x+3m^2-2m-5k=0$ 的二根都是有理數，則 $k=$ _____

提示：二根為有理數 $\Rightarrow D$ 有理數的完全平方

解答： $x^2-4(m-1)x+(3m^2-2m-5k)=0$ 之二根均為有理數 [$D=(\text{有理數})^2$]

$$D=4(m-1)^2-(3m^2-2m-5k)=m^2-6m+(4+5k)$$

$$=(m^2-6m+9)+(4+5k)-9=(m-3)^2+5k-5 \text{ 為有理數的完全平方}$$

$$\therefore 5k-5=0 \Rightarrow k=1$$

25 二次方程式<II>

1. 根的正負及其條件：設 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根為 α 、 β 判別式為 $D=b^2-4ac$

<I> 兩根同號(考慮(A) $D=b^2-4ac$ (B) $\alpha+\beta$ (C) $\alpha\cdot\beta$)

① 兩根皆為正數(A) $D\geq 0$ (B) $\alpha+\beta>0$ (C) $\alpha\cdot\beta>0$

② 兩根皆為負數(A) $D\geq 0$ (B) $\alpha+\beta<0$ (C) $\alpha\cdot\beta>0$

<II> 兩根異號(考慮① $\alpha+\beta$ ② $\alpha\cdot\beta$)

① 正根>|負根| $\Leftrightarrow$ (A) $\alpha+\beta>0$ (B) $\alpha\cdot\beta<0$

② 正根=|負根| $\Leftrightarrow$ (A) $\alpha+\beta=0$ (B) $\alpha\cdot\beta<0$

③ 正根<|負根| $\Leftrightarrow$ (A) $\alpha+\beta<0$ (B) $\alpha\cdot\beta<0$

2. 根與一定數 k 之大小關係與條件：將上列條件之 α 改成 $\alpha-k$ ， β 改成 $\beta-k$ 考慮

(A) $D=b^2-4ac$ (B) $(\alpha-k)+(\beta-k)$ (C) $(\alpha-k)(\beta-k)$ 之條件。

[例1] 設 $a>0$ ，且 $(m-1)x^2-m(m+1)x+(m+4)(x+2a)=0$ 之兩根絕對值相等，符號相反，則 $m=$ _____。

提示：考慮①判別式 ② $\alpha+\beta$ ③ $\alpha\cdot\beta$ 之條件

解答： $a>0$ ， $(m-1)x^2-(m^2-4)x+2a(m+4)=0$

$$<I> \alpha+\beta=\frac{m^2-4}{m-1}=0 \Rightarrow m=\pm 2 \text{ ————①}$$

$$<II> \alpha\cdot\beta=\frac{2a(m-4)}{m-1}<0 \Rightarrow 2a(m-4)(m-1)<0$$

$$\text{又 } a>0 \therefore -4<m<1 \text{②}$$

$$<III> \text{由①②得 } m=-2$$

[例2] 設 $a\in\mathbb{Z}$ ， α 、 β 為 $x^2-12x+(32-a)=0$ 之二實根若 $\alpha>4$ 且 $\beta>4$ 則 a 值共有幾個。

提示：考慮①判別式 ② $(\alpha-k)+(\beta-k)$ ③ $(\alpha-k)(\beta-k)$ 之條件

解答： $<I> D=36-(32-a)\geq 0 \Rightarrow a\geq -4 \text{ ————①}$

$$<II> (\alpha-4)+(\beta-4)=\alpha+\beta-8=12-4=8>0 \text{ 恒成立}$$

$$<III> (\alpha-4)(\beta-4)>0 \Rightarrow (32-a)-4\cdot 12+16>0 \Rightarrow a<0 \text{ —②}$$

$$<IV> \text{取①②得 } -4\leq a<0 \text{ 但 } a\in\mathbb{Z} \therefore a=-4, -3, -2, -1 \text{ 等4個}$$

26 n 次方程式根的定義

1. 設 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ，則形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 稱為一元 n 次方程式
2. 根的定義：(1) α 為 $f(x)=0$ 的一根 $\Leftrightarrow f(\alpha)=0$ $\cdots$ <代入性>
 (2) α 為 $f(x)=0$ 的一根 $\Leftrightarrow f(x)$ 有 $x-\alpha$ 的因式 $\cdots$ <降幕性>
3. 代數基本定理：(1) 設 $f(x)$ 為佈於 $\mathbb{C}$ 之 n 次多項函數，則一元 n 次方程式 $f(x)=0$
 - ① 至少有一個複數根 ② 至少有 n 個複數根(不必相異)
 - ③ 至多有 n 個複數根 $\Rightarrow f(x)=0$ 恰有 n 個複數根

[例1] 設 $k \in \mathbb{Z}$ ，方程式 $f(x) = x^3 - kx^2 - 4k^2x - 4 = 0$ 有一根為2試求 k 值，並求其餘兩根。

提示：方程式有未定係數時，將根代入，求 k

解答： $f(2) = 8 - 4k - 8k^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow (k+1)(2k-1) = 0$ 但 $k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore k = -1, f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+1)(x+2)$$

$\therefore$ 其餘兩根為 $-1, -2$

[例2] 方程式 $f(x) = x^4 + ax^3 + ax^2 + 11x + b = 0$ 之兩根為3及 -2 試求 a, b 之值及其餘兩根。

提示：先將兩根代入eq，求 a, b 之值

$$\text{解答：} f(3) = 81 + 27a + 9a + 33 + b = 36a + b + 114 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2) = 16 - 8a + 4a - 22 + b = -4a + b - 6 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{解}\textcircled{1}\textcircled{2}\text{得 } a = -3 \quad b = -6$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$f(x) = (x-3)(x+2)(x-1)^2 = 0 \quad \therefore \text{其餘兩根為} 1, 1$$

[例3] 設 $f(x) = x^5 + 10x^4 + 8x^3 + 78x + 3$ 則 $f(-9) = \underline{\hspace{2cm}}$

提示： $f(-9)$ 表 $f(x)$ 被 $x-9$ 除所得之餘式

$$\begin{array}{r} \text{解答：} \quad 1+10+8+0+78+3 \quad \overline{) -9} \\ \quad \quad \quad -9-9+9-81+27 \\ \hline \quad \quad \quad 1+1-1+9-3+30 \\ \therefore f(-9) = 30 \end{array}$$

27 複數根、無理根成雙定理

1. 複數根成雙定理：設 $f(x)=0$ 為佈於 $\mathbb{R}$ 之 n 次方程式， $a, b \in \mathbb{R}$ ， $b \neq 0$ 若 $a+bi$ 為 $f(x)=0$ 之一根，則 $a-bi$ 亦必為 $f(x)=0$ 之一根

※推論：佈於 $\mathbb{R}$ 之奇次方程式至少有一實根。

2. 無理根成雙定理：設 $f(x)=0$ 為佈於 $\mathbb{Q}$ 之 n 次方程式， $a, b \in \mathbb{Q}$ ， $b \neq 0$ 若 $a+\sqrt{b}$ 為 $f(x)$ 之一根，($\sqrt{b}$ 為無理數)則 $a-\sqrt{b}$ 亦必為 $f(x)=0$ 之根

[例1] 若 $2-\sqrt{3}i$ 為 $x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+7=0$ 之根則 $\csc 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

提示：① 複數根成雙 ② 利用根與係數之關係

解答： $x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+7=0$ 有一根為 $2-\sqrt{3}i$ 必有一根為 $2+\sqrt{3}i$

$$(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=\tan\theta+\cot\theta=4$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta} = 2\csc 2\theta$$

$$\text{故 } \csc 2\theta = 2$$

[例2] 若 $3-2\sqrt{2}$ 為 $f(x)=x^4-22x^2-72x+13=0$ 之一根，試求其餘各根。

提示：① 無理根成雙 ② 以 $3+2\sqrt{2}$ ， $3-2\sqrt{2}$ 為二根作一方程式 ③ 降幕

解答： $f(x)=x^4-22x^2-72x+13=0 \in \mathbb{Q}[x]$ 有一根 $3-2\sqrt{2}$ 則另有一根 $3+2\sqrt{2}$

$$\text{以 } 3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2} \text{ 為二根作成二次eq: } x^2-6x+1=0$$

$$f(x)=x^4-22x^2-72x+13=(x^2-6x+1)(x^2+6x+13)=0 \text{ 由 } x^2+6x+13=0$$

$$\text{得兩根為 } -3 \pm 2i$$

[例3] 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0 \in \mathbb{R}[x]$

$P, q \in \mathbb{R}$ ， $q \neq 0$ 若 $P+qi$ 為方程式 $f(x)=0$ 之一虛根

試証：方程式 $f(x)=0$ 必有一根為 $P-qi$

提示：利用根的定義

解答：設 $z=P+qi$ 則因 z 為 $f(x)=0$ 之一根

$$\therefore f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_2z^2+a_1z+a_0=0$$

$$\therefore f(\bar{z})=a_n(\bar{z})^n+a_{n-1}(\bar{z})^{n-1}+\dots+a_2(\bar{z})^2+a_1(\bar{z})+a_0$$

$$=a_n\bar{z}^n+a_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\dots+a_2\bar{z}^2+a_1\bar{z}+a_0$$

$$=\overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0}=\bar{0}=0$$

故 $\bar{z}=P-qi$ 亦為 $f(x)=0$ 之一虛根

28 勘根定理

＜內容＞設 $f(x)=0$ 為佈於 $\mathbb{R}$ 之 n 次方程式 α 、 β 為兩相異實數且均非 $f(x)=0$ 之根，若 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ 則至少有一實根介於 α 與 β 之間

＜推論＞設 $f(x)=0$ 為佈於 $\mathbb{R}$ 之 n 次方程式， α 、 β 為兩相異實數，且均非 $f(x)$ 之根① $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \Leftrightarrow$ 有正奇數個實根介於 α 、 β 之間 ② $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0 \Leftrightarrow$ 有0個或正偶數個實根介於 α 、 β 之間

〔例1〕設實係二次方程式 $ax^2 - (a-1)x - 6 = 0$ 有一實根介於1與2之間，另一實根介於-1與-2之間，試求 a 值的範圍。

提示：勘根定理

解答： $f(x) = ax^2 - (a-1)x - 6 = 0$

$$\begin{cases} f(1) \cdot f(2) < 0 \\ f(-1) \cdot f(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-5)(2a-4) < 0 \\ (2a-7)(6a-8) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-4 > 0 \\ \frac{4}{3} < a < \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{故 } 2 < a < \frac{7}{2}$$

〔例2〕設 $f(x) = 3x^5 - 5x + 2$ ， $g(x) = 8x^4 - 7$ 證明：存在實數 α 且 $0 < \alpha < 1$ 使得 $f(\alpha) = g(\alpha)$

提示：① 作 $h(x) = f(x) - g(x)$ ② 利用勘根定理

解答：令 $h(x) = f(x) - g(x) = 3x^5 - 8x^4 - 5x + 9$ $\because h(0) = 9 > 0$ $h(1) = -1 < 0$

$\therefore h(0) \cdot h(1) < 0$ 故存在實數 α ， $0 < \alpha < 1$ ，使 $h(\alpha) = 0$

即 $h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha)$

〔例3〕設e.q. $x^3 + 2x^2 + 3x + k = 0$ 有奇數個根介於 $(-2, -1)$ 之間試求 k 之範圍

提示：有奇數個根介於 $(-2, -1)$ 之間 $\Rightarrow f(-2) \cdot f(-1) < 0$

解答： $f(-2) \cdot f(-1) = (-8 + 8 - 6 + k) \cdot (-1 + 2 - 3 + k)$

$$= (k-6)(k-2) < 0$$

$$\therefore 2 < k < 6$$

29 二元一次方程組之公式解

設方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1, b_1 \text{ 不同時為 } 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2, b_2 \text{ 不同時為 } 0) \end{cases}$

令 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

① 若 $\Delta \neq 0$ ，則此方程組恰有一組解： $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ， $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ (相容方程組)

② 若 $\Delta = 0$ 但 $\Delta_x \neq 0$ 或 $\Delta_y \neq 0$ ，則此方程組無解 (矛盾方程組)

③ 若 $\Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y$ ，則此方程組有無限多組解 (相依方程組)

[例1] 設 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 3x - 5y \end{cases}$ 今可將 x, y 解出如下：

$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ 則 a, b, c, d 各為多少？

提示：解出 x, y 後比較係數

解答：令 $x - 2y = u$ ① $3x - 5y = v$ ②

① $\times 5$ - ② $\times 2$ 得 $-x = 5u - 2v$ $\therefore x = -5u + 2v$

① $\times 3$ - ② 得 $-y = 3u - v$ $\therefore y = -3u + v$

故得 $a = -5$ $b = 2$ $c = -3$ $d = 1$

[例2] 設 $\begin{cases} (1-a)x + 2y = 0 \\ 3x + (2-a)y = 0 \end{cases}$ 除 $x=0, y=0$ 外，另有其他組解則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

提示：有異於 $(0,0)$ 之解則 $\Delta = 0$

解答： $\begin{cases} (1-a)x + 2y = 0 \\ 3x + (2-a)y = 0 \end{cases}$ 有異於 $(0,0)$ 之解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-a & 2 \\ 3 & 2-a \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-a)(2-a) - 6 = 0$ $\therefore a = -1.4$

30 三元一次方程組之公式解

$$\text{設方程組(L): } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \text{ 則可得}$$

1. 若 $\Delta \neq 0$ 則方程組只有一組解： $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$
2. 若 $\Delta = 0$ 而 $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ 中至少有一不為 0，則無解
3. 若 $\Delta = 0$ 且 $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ 則可能無限多解或無解

[例1] 若方程組 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$ 有異於 $(0,0,0)$ 之解則 (A) $a=b=c$ (B) $a+b+c=0$

(C) a, b, c 均為 0 或 1 (D) a, b, c 不完全相異 (E) a, b, c 完全相異。

提示：方程式有異於 $(0,0,0)$ 之解表有無限多組解則 $\Delta = 0$

解答： $\because$ 原方程式有異於 $(0,0,0)$ 之解 $\therefore$ 有無限多解

$$\Rightarrow \Delta = 0 \quad \therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-b)(a-c)(b-c) = 0$$

$$\therefore a, b, c \text{ 不完全相異}$$

[例2] 設 $a = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ 則 $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$ 之值為_____。

提示：化簡後利用隸美弗定理

$$\text{解答：} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$= a(a^3 + a^2 + a + 1) + 1 = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = \frac{a^5 - 1}{a - 1}$$

又 $a^5 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1 \quad \therefore$ 此行列式值為 0

31 行列式的降階

- 步驟：1. 把矩陣經列運算的方法，使得某一行中最多只有一個元不為0。
 2. 就最多只含一個不為0之元那一行展開，其展開後最多只需寫出一項。

例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

(對第二行降階)

[例1] 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 求 $\det(A)$

提示：高階運算 $\Rightarrow$ 利用降階

解答： $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (1) \\ \leftarrow (-2) \\ \leftarrow (-2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(在第二行製造零)} \\ \\ \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-4) \\ \leftarrow (3) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \text{(在第一行製造零)} \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(4-14) = 10$$

32 不等式解法< I >

1. 一次不等式： $ax > b$ [或 $ax < b$]

① 當 $a > 0$ 時 $x > \frac{b}{a}$

② $a < 0$ 時 $x < \frac{b}{a}$

③ 當 $a = 0$ 時 $\begin{cases} \text{若 } b \geq 0 \text{ 則無解 (即解集為 } \phi) \\ \text{若 } b < 0 \text{ 則恒成立 (即解集為 } R) \end{cases}$

2. 二次不等式： $ax^2 + bx + c > 0$ [或 $ax^2 + bx + c < 0$]

標準式	判別式	變形	解
$ax^2 + bx + c > 0$ $a > 0, \alpha > \beta$	$D = b^2 - 4ac > 0$	$a(x - \alpha)(x - \beta) > 0$	$x > \alpha, x < \beta$
	$D = b^2 - 4ac = 0$	$a(x - \alpha)^2 > 0$	$x \in R, x \neq \alpha$
	$D = b^2 - 4ac < 0$	$a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-D}{4a} > 0$	恒成立
$ax^2 + bx + c < 0$ $a > 0, \alpha > \beta$	$D = b^2 - 4ac > 0$	$a(x - \alpha)(x - \beta) < 0$	$\beta < x < \alpha$
	$D = b^2 - 4ac = 0$	$a(x - \alpha)^2 < 0$	ϕ
	$D = b^2 - 4ac < 0$	$a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-D}{4a} < 0$	ϕ

[例1] 設 $x - 1 < 3 - x < x + 1$ 求 x 之範圍。

提示： $A < B < C \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$

解答： $< I >$ 由 $x - 1 < 3 - x \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2 \dots\dots ①$

$< II > 3 - x < x + 1 \Rightarrow 2 < 2x \Rightarrow x > 1 \dots\dots\dots ②$

$< III >$ 由①②得 $1 < x < 2$

[例2] (a) $x^2 + 9x + 8 < 0$ (b) $x^2 - 8x + 15 > 0$ (c) $-8 + x - 4x^2 > 0$

提示：本題為二次不等式之基本解法

解答：(a) $x^2 + 9x + 8 < 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 8) < 0 \Rightarrow -8 < x < -1$

(b) $x^2 - 8x + 15 > 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 3) > 0 \Rightarrow x > 5, x < 3$

(c) $-8 + x - 4x^2 > 0 \Rightarrow 4x^2 - x + 8 < 0$

$\therefore D = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8 < 0$ 且 $4 > 0 \therefore 4x^2 - x + 8 > 0$ 恒成立

$\therefore 4x^2 - x + 8 < 0$ 無解，即解集合為 ϕ

33 不等式解法<II>

1. 二次函數值之符號性質：設 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$

① $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > 0$ 且 $D < 0$

② $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > 0$ 且 $D \leq 0$

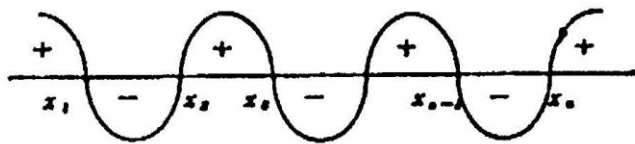
③ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < 0$ 且 $D < 0$

④ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < 0$ 且 $D \leq 0$

2. 高次不等式： $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \leq 0$

① 先因式分解 $\Rightarrow a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) \leq 0$

② 由下示曲線判定解集



$f(x) > 0$ 為橫線上方與曲線圍成的區間
 $f(x) < 0$ 為橫線下方與曲線圍成的區間

[例1] 若 $\forall x \in \mathbb{R}$ 恒使 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19) > 0$ 成立，求 a 之範圍。

提示： $f(x) > 0$ 恒成立 $\Rightarrow a > 0$ 且 $D > 0$

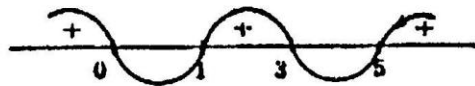
解答： $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19) > 0$ 恒成立

$$\therefore D = (a-5)^2 - 2(3a-19) < 0 \Rightarrow (a-7)(a-9) < 0 \therefore 7 < a < 9$$

[例2] (a) $x(x-1)(x-3)(5-x) < 0$ (b) $(4-x^2)(x+1)(x^2+2)(27-x^3) < 0$

提示：高次不等式須先因式分解，再圖示其範圍

解答：(a) $x(x-1)(x-3)(5-x) > 0 \Rightarrow x(x-1)(x-3)(x-5) < 0$

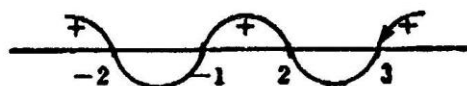


$$\therefore x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 3 \text{ 或 } x > 5$$

(b) $(4-x^2)(x+1)(x^2+2)(27-x^3) < 0$

$$(x^2-4)(x+1)(x^2+2)(x^3-27) < 0 \text{ (恒正約掉)}$$

$$(x+2)(x-2)(x+1)(x-3)(x^2+3x+9) < 0$$



$$\therefore -2 < x < -1 \text{ 或 } 2 < x < 3$$

34 不等式解法<III>

1. 分式不等式

$$\boxed{\text{型I}} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$\boxed{\text{型II}} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{h(x)}{k(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{k(x)} > 0 \Rightarrow \text{通分化為型I}$$

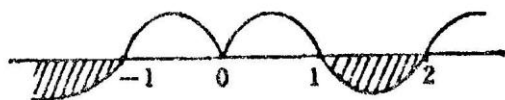
2. 含絕對號之不等式：① 原則：分段討論，去絕對值符號，再求解

$$\text{② } |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{當 } f(x) \geq 0 \text{ 時} \\ -f(x) & \text{當 } f(x) < 0 \text{ 時} \end{cases}$$

[例1] 試解 $\frac{x^2(x-1)}{(2-x)(x+1)} \geq 0$

提示： $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0$

解答： $\frac{x^2(x-1)}{(2-x)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow x^2(x-1)(2-x)(x+1) \geq 0$



$$\Rightarrow x^2(x-1)(x-2)(x+1) \leq 0 \Rightarrow x < -1 \text{ 或 } x=0 \text{ 或 } 1 \leq x < 2$$

[例2] $|x^2+3x-4| > x+4$ 之解集合為 _____。

提示：遇絕對值：① 平方 ② 討論



解答：① 當 $x \leq -4$ 時則 $x^2+3x-4 > x+4 \Rightarrow (x+4)(x-2) > 0$

$$x < -4 \text{ 或 } x > 2 \quad \therefore \boxed{x < -4} \dots\dots\dots(A)$$

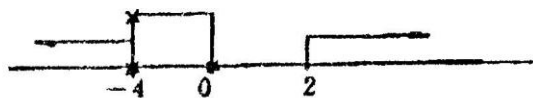
② 當 $-4 < x \leq 1$ 時 $-x^2-3x+4 > x+4 \Rightarrow x(x+4) < 0$

$$-4 < x < 0 \quad \therefore \boxed{-4 < x < 0} \dots\dots\dots(B)$$

③ 當 $x > 1$ 時 $x^2+3x-4 > x+4$ 則 $(x+4)(x-2) > 0$

$$x < -4 \text{ 或 } x > 2 \quad \therefore \boxed{x > 2} \dots\dots\dots(C)$$

④ 由(A)、(B)、(C)得 $x < 0$ 但 $x \neq -4$ 或 $x > 2$



35 不等式解法<IV>

無理不等式

1. 非標準型: (a) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & \dots\dots A \\ g(x) \geq 0 & \dots\dots B \\ f(x) > g(x) & \dots\dots C \end{cases}$$

Ans: $A \cap B \cap C$ (b) $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & \dots\dots\dots A \\ g(x) > 0 & \dots\dots\dots B \\ f(x) < [g(x)]^2 & \dots\dots C \end{cases}$$

Ans: $A \cap B \cap C$ 2. 標準型 $\Rightarrow \sqrt{f(x)} > g(x)$ 設 $f(x) \geq 0$ 之解集合為 A① 若 $g(x) \geq 0 \dots\dots\dots$ 解集為 B則 $f(x) > [g(x)]^2 \dots\dots$ 解集為 C得 $A \cap B \cap C \dots\dots\dots$ (a)② 若 $g(x) < 0 \dots\dots$ 解集為 D得 $A \cap D \dots\dots\dots$ (b)由 (a)、(b) 得 $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap D) \dots\dots$ Ans[例1] (a) $\sqrt{x+1} < 3-x$ (b) $\sqrt{10-x^2} > x+2$

提示: 根式不等式作圖最快

解答: (a) <I> $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \dots\dots A$ <II> $3-x > 0 \Rightarrow x < 3 \dots\dots B$ <III> 原式平方: $x+1 < 9-6x+x^2 \Rightarrow x^2-7x+8 > 0$

$$\Rightarrow x > \frac{7+\sqrt{17}}{2} \text{ 或 } x < \frac{7-\sqrt{17}}{2} \dots\dots\dots C$$

$$<IV> \text{ 由 } A \cap B \cap C \text{ 得 } -1 \leq x < \frac{7-\sqrt{17}}{2}$$

(b) $10-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-10 \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \dots\dots\dots A$ <I> 若 $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \dots\dots\dots B$ 原式平方: $10-x^2 > x^2+4x+4 \Rightarrow -3 < x < 1 \dots\dots C$ 由 $A \cap B \cap C$ 得 $-2 \leq x < 1 \dots\dots\dots$ ①<II> 若 $x+2 < 0$ 則 $x < -2 \dots\dots D$ 由 $A \cap D$ 得 $-\sqrt{10} \leq x < -2 \dots\dots$ ②<III> 由 ①② 得 $-\sqrt{10} \leq x < 1$

36 絕對不等式

1. 算術平均數與幾何平均數

設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為 n 個正數則 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$

* 當 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 時等號成立

2. 柯西不等式：設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ 則

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

$$\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \quad \text{稱為柯西不等式}$$

當 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 時不等式中等號成立

[例1] 設 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ 試證 $a^5 + b^5 + c^5 \geq abc(ab + bc + ca)$

提示：正實數，和與積之不等式，利用算幾平均數

解答： $\because \frac{a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + c^5}{5} \geq \sqrt[5]{a^{15} b^5 c^5}$

$$\therefore 3a^5 + b^5 + c^5 \geq 5a^3 \cdot b \cdot c \quad \text{——①}$$

$$\text{同理 } a^5 + 3b^5 + c^5 \geq 5ab^3c \quad \text{——②}$$

$$a^5 + b^5 + 3c^5 \geq 5abc^3 \quad \text{——③}$$

$$\frac{\text{①} + \text{②} + \text{③}}{5} = a^5 + b^5 + c^5 \geq abc(a^2 + b^2 + c^2) \quad \dots\dots\dots \text{④}$$

$$\text{又 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \dots\dots\dots \text{⑤}$$

由④⑤及遞移性知 $a^5 + b^5 + c^5 \geq abc(ab + bc + ca)$

[例2] 設 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 且 $x + 2y + 3z = 4$ 則 $x^2 + y^2 + z^2$ 之 $m =$ _____。

提示：實數平方相加之最大最小值 $\Rightarrow$ 柯西不等式

解答： $(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) \geq (x + 2y + 3z)^2 \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 14 \geq 16$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{8}{7} \quad \therefore m = \frac{8}{7}$$

37 最大、最小值 < I >

型 I : 二次函數求最大、最小值 $\Rightarrow$ 利用配方法 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) 為二次函數

$$\Rightarrow y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

1. 若 $a > 0$ 則拋物線開口向上，圖形有最低點，

$$\text{當 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 時 } y \text{ 有最小值 } -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

2. 若 $a < 0$ 則拋物線開口向下，圖形有最高點，

$$\text{當 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 時 } y \text{ 有最大值 } -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

型 II : 二次方程式求最大、最小值 $\Rightarrow$ 利用判別式法[例1] 設 $x, y \in \mathbb{R}$ 則函數 $Z=2x^2-2xy+y^2+2x-3y+3$ 之極小 = _____

提示: * 雙變數配方兩次

$$\begin{aligned} \text{解答: } z &= 2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 3 = y^2 - (2x+3)y + (2x^2+2x+3) \\ &= \left[y^2 - (2x+3)y + \left(\frac{2x+3}{2}\right)^2 \right] - \frac{4x^2+12x+9}{4} + 2x^2+2x+3 \\ &= \left(y - \frac{2x+3}{2} \right)^2 + \left(x^2 - x + \frac{3}{4} \right) \\ &= \left(y - \frac{2x+3}{2} \right)^2 + \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \therefore m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[例2] 設 $x \in \mathbb{R}$ ，則 $\frac{5x^2+8x+5}{x^2+1}$ 之 $M = \underline{\hspace{2cm}}$ $m = \underline{\hspace{2cm}}$

提示: ① 令值法 ② 利用判別式求極值

$$\text{解答: 令 } \frac{5x^2+8x+5}{x^2+1} = k \text{ 則 } 5x^2+8x+5 = kx^2+k$$

$$(k-5)x^2-8x+(k-5)=0 \quad \because x \in \mathbb{R} \quad \therefore \text{左列eq有實根}$$

$$\therefore D=16-(k-5)^2 \geq 0 \Rightarrow 16 \geq (k-5)^2 \Rightarrow 1 \leq k \leq 9$$

$$\text{即 } 1 \leq \frac{5x^2+8x+5}{x^2+1} \leq 9 \quad \text{故 } M=9 \quad m=1$$

38 最大、最小值<II>

型III : 正實數相加, 相乘型 $\Rightarrow$ 利用算幾平均數

$$\text{若 } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \text{ 則 } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$$

當 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 時 “等號” 成立

型IV : 實數平方和之型 $\Rightarrow$ 利用柯西不等式 若 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ 則

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

☆此兩型求得最大、最小值後, 必須加以檢驗

[例1] 設 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ 且 $3x + 2y + z = 6$ 令 xyz 之最大值為 H 又 $x^3 y^2 z$ 之最大值為 K 則 $H =$ _____

$$K = \text{_____}.$$

提示: 正實數相加相乘型 $\Rightarrow$ 算幾平均數

$$\text{解答: (a)} \frac{3x + 2y + z}{3} \geq \sqrt[3]{3x \cdot 2y \cdot z} \Rightarrow \frac{6}{3} \geq \sqrt[3]{6xyz} \text{ 立方之}$$

$$8 \geq 6xyz \Rightarrow xyz \leq \frac{4}{3} \text{ 故 } H = \frac{4}{3}$$

$$\text{(b)} \frac{x + x + x + y + y + z}{6} \geq \sqrt[6]{x^3 \cdot y^2 \cdot z} \Rightarrow \frac{3x + 2y + z}{6} \geq \sqrt[6]{x^3 \cdot y^2 \cdot z}$$

$$\frac{6}{6} \geq \sqrt[6]{x^3 y^2 z} \text{ 6次方 } \Rightarrow 1 \geq x^3 y^2 z \text{ 故 } K = 1$$

[例2] 設 $\theta \neq \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ 則 $f(\theta) = \frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{9}{\cos^2 \theta}$ 之 $m =$ _____。

提示: 實數平方和 $\Rightarrow$ 柯西不等式

$$\text{解答: } \frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{9}{\cos^2 \theta} = \left[\left(\frac{2}{\sin \theta} \right)^2 + \left(\frac{3}{\cos \theta} \right)^2 \right] (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \geq \left[\frac{2}{\sin \theta} \right.$$

$$\left. \cdot \sin \theta + \frac{3}{\cos \theta} \cdot \cos \theta \right]^2 \therefore f(\theta) \geq 25 \quad m = 25$$

$$\text{(b)} f(\theta) = \frac{a^2}{\cos^2 \theta} + \frac{b^2}{\sin^2 \theta} = \left[\left(\frac{|a|}{\cos \theta} \right)^2 + \left(\frac{|b|}{\sin \theta} \right)^2 \right] (\cos^2 \theta$$

$$+ \sin^2 \theta) \geq (|a| + |b|)^2$$

$$\text{故 } m = (|a| + |b|)^2$$

39 最大、最小值<III>

型V 線性規劃：若所予條件為二元一次不等式或不等式組，而欲求最大最小值。

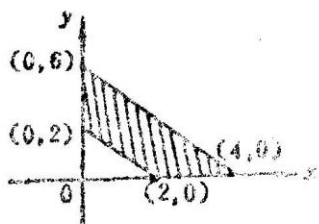
先將題予條件圖示之。

⇒ { 若求最大值 ⇒ 必存在於頂點上
若求最小值 ⇒ 再考慮幾何意義

[例1] 若 x, y 滿足 $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y - 12 \leq 0, x + y - 2 \geq 0$ 求 $5x - 2y$ 之 $M, m = ?$

提示：① 畫不等式的圖 ② 最大最小值發生於頂點

解答：{
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y - 12 \leq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$$



令 $5x - 2y = k$

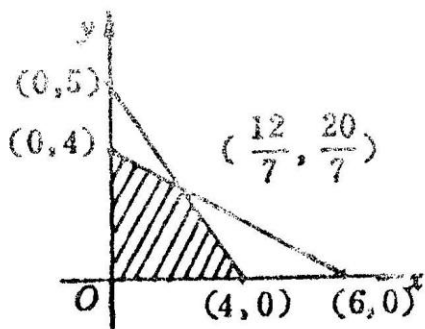
(x, y)	k
$(4, 0)$	$[20] \leftarrow M$
$(0, 6)$	$[-12] \leftarrow m$
$(0, 2)$	-4
$(2, 0)$	10

[例2] 某工廠用兩種不同原料均可產同一產品，若採用甲種原料每噸成本1000元，運費500元，可得產品90公斤，若採用乙種原料，每噸1500元，運費400元，可得產品100公斤，今每日預算成本不超過6000元，運費不超過2000元，問此工廠每日最多可產_____公斤。

提示：① 列表畫圖 ② 將頂點代入求值

解答：

	甲	乙	預算
成本	1000	1500	6000
運費	500	400	2000
產量	90	100	?



設甲、乙原料分別採用 x, y 噸可得最大產量

{
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1000x + 1500y \leq 6000 \\ 500x + 400y \leq 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 5x + 4y \leq 20 \end{cases}$$

令 $90x + 100y = k$

(x, y)	k
$(0, 4)$	400
$(4, 0)$	360
$(\frac{12}{7}, \frac{20}{7})$	$[400] \leftarrow M$

40 最大、最小值<IV>

三角極值 ※原則：① 化為同函數，同名角

② 盡量利用配方法，輔助角公式

③ 角度有限制時，要特別注意函數值的範圍

1. 二次函數 $\Leftrightarrow$ 利用配方法2. $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 之一次組合 $\Leftrightarrow$ 利用輔助角公式3. 二元二次齊次式 $\Leftrightarrow$ 降次 $\Leftrightarrow$ 公式求極值4. 倒數型 $\Leftrightarrow$ 利用算術平均數 $\geq$ 幾何平均數

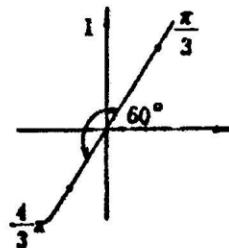
5. 分式型 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{a. 單一函數: } \sin\theta \text{ 或 } \cos\theta \Rightarrow \text{代值法} \\ \text{b. 非單一函數: } \sin\theta \text{ 且 } \cos\theta \Rightarrow \text{公式} \\ \text{c. } \tan\theta \text{ 或 } \cot\theta \Rightarrow \text{判別式} \end{cases}$

[例1] 設 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則 $f(\theta) = 2\sqrt{3}\cos^2\theta + \sin 2\theta$ 之 $M, m =$ _____。

提示：① 利用半角公式降幕 ② 化成單一函數

$$\text{解答: } f(\theta) = 2\sqrt{3}\cos^2\theta + \sin 2\theta = 2\sqrt{3}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \sin 2\theta$$

$$= \sqrt{3} + \sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta = \sqrt{3} + 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$\therefore 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{① 當 } 2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ 即當 } \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{ 時 } M = \sqrt{3} + 2$$

$$\text{② 當 } 2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ 時即當 } \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 時 } m = 0$$

[例2] $0 \leq \theta \leq \pi$ 則 $\frac{2\sin\theta}{\sin\theta + 2}$ 之 $M, m =$ _____。

提示：① 將假分式化為帶分式 ② 代值法

$$\text{解答: } \frac{2\sin\theta}{\sin\theta + 2} = \frac{2(\sin\theta + 2) - 4}{\sin\theta + 2} = 2 - \frac{4}{\sin\theta + 2}$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$\text{① 當 } \sin\theta = 1 \text{ 時 } M = \frac{2}{3}$$

$$\text{② 當 } \sin\theta = 0 \text{ 時 } m = 0$$

41 等差數列、級數與等比數列、級數

1. 等差數列： $\langle a_n \rangle \Rightarrow a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$ ， a_1 稱為首項， d 稱為公差，則第 n 項， $a_n = a_1 + (n-1)d$
2. 等比數列： $\langle a_n \rangle \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ (各項 $\neq 0$)， a_1 稱為首項， r 稱為公比則第 n 項， $a_n = a \cdot r^{n-1}$
3. 等差級數：首 n 項和， $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
4. 等比級數：首 n 項和， $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

[例1] 設 a, x, y, b 成等差數列， x, y, u, v, w 成等比則 $W = (A) \frac{(a+2b)^4}{3(2a+b)^3}$ (B)

$$\left(\frac{a+2b}{2a+b}\right)^4 \quad (C) \frac{(2a+b)^4}{3(a+2b)^3} \quad (D) \left(\frac{2a+b}{a+2b}\right)^3$$

提示：① 求公差以 a, b 表 x, y ② 再求公比，以 a, b 表出 w

$$\text{解答：} a, x, y, b \text{ 成等差} \Rightarrow b = a + 3d \Rightarrow d = \frac{b-a}{3}$$

$$\therefore x = a + \frac{b-a}{3} \quad y = a + \frac{2(b-a)}{3}$$

$$\text{又 } x, y, u, v, w \text{ 成等比} \Rightarrow r = \frac{y}{x} = \frac{a + \frac{2(b-a)}{3}}{a + \frac{b-a}{3}} = \frac{a+2b}{2a+b}$$

$$W = x \cdot r^4 = \frac{2a+b}{3} \cdot \left(\frac{a+2b}{2a+b}\right)^4 = \frac{(a+2b)^4}{3(2a+b)^3} \dots\dots\dots (A)$$

[例2] $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n \cdot x^{n-1} = ?$ ($x \neq 1$)

提示：係數成等差，後半部成等比，利用 $S_n - r \cdot S_n$ 化簡

$$\text{解答：} \quad S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

$$-) \quad x \cdot S_n = \quad x + 2x^2 + \dots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - n \cdot x^n = \frac{1-x^n}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{n \cdot x^n}{1-x}$$

42 “ Σ ”符號的性質公式

$$1. \text{性質: } ① \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k \quad ② \sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$$

$$③ \sum_{k=1}^n (a_k b_k) \neq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \quad ④ \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \neq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k}$$

$$⑤ \sum_{k=1}^n 1 = n \quad ⑥ \sum_{k=1}^n c = nc$$

※注意： Σ 後面加，減可拆開，乘除不能拆開

2. 特殊級數之總和：

$$① \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$② \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$③ \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

[例1] $S_n = 1 + (1+2)(1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) = \underline{\hspace{2cm}} c$

提示：一般項 $\Rightarrow (1+2+3+\cdots+k) = \frac{1}{2}k(k+1)$

解答：
$$S_n = \sum_{k=1}^n (1+2+3+\cdots+k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}k(k+1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{2} [n(n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{3}] = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

[例2] 試求 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

提示：
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

解答：
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

43 數列一般項

1. 階差法：

數列 $\langle a_n \rangle$ 之階差數列 $\langle b_k \rangle$ 則 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ (第二項表階差數列之首 $n-1$ 項和)

2. 總和差法：數列 $\langle a_n \rangle$ 之首 n 項和為 S_n 則 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$) $a_1 = S_1$

〔例1〕數列 $\langle 1, 2, 5, 10, 17, \dots, a_n, \dots \rangle$ 之第 n 項, $a_n =$ _____

首 n 項和 $S_n =$ _____。

提示： $\langle 1, 2, 5, 10, 17, \dots, a_n, \dots \rangle$

1 3 5 7

解答：(1) $\therefore a_n = 1 + [1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + \text{第}(n-1)\text{項}]$

$$= 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$$

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k^2 - 2k + 2 = \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 2n = \frac{1}{3}n(n^2 + n + 6)$$

〔例2〕 數列 $\langle a_n \rangle$ 的首 n 項和 $S_n = 5n^2 + 2n$ 則 $a_n =$ _____

提示： $a_n = S_n - S_{n-1}$

解答: $S_n = 5n^2 + 2n$ $a_1 = S_1 = 7$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (5n^2 + 2n) - [5(n-1)^2 + 2(n-1)]$$

$$= 5n^2 + 2n - (5n^2 - 8n + 3) = 10n - 3 \rightarrow a_1 = 7 \therefore a_n = 10n - 3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

【例3】數列 $\langle a_n \rangle$ 若 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = 2^n \cdot a_n$ 則 $a_n =$ _____

提示：漸化式 $\Rightarrow$ 累相乘法

解答: $a_1 = \sqrt{2}$

$$a_2 = a_1 2^l$$

$$a^3 = a_2 \cdot 2^2$$

•

$$\times \quad \dot{a}_n = a_{n-1} 2^{n-1}$$

$$a_n = \sqrt{2} \cdot 2^{1+2+\dots+(n-1)} = 2^{\frac{1}{2}} + \frac{n(n-1)}{2}$$

44 無窮等比級數

1. r 級數：無窮等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$

① 當 $|r| < 1$ 時 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 收斂於 $\frac{a}{1-r}$

② 當 $|r| \geq 1$ 時 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 為發散級數

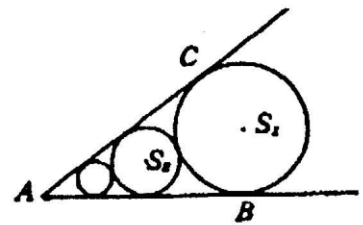
2. 無窮等比級在幾何圖形的應用 (重要)

步驟：① 找首項

② 找公比(即第一圖形與第二圖形之關係)

[例1] 如右圖： $\angle BAC = 60^\circ$ ，最大圓面積為 S 作互相外切的無數個圓，試求這些圓的面積和。(以 S 表出)

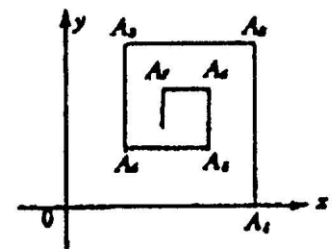
提示：先求公比 $\frac{S_2}{S_1}$



$$\text{解答：} r_1 - r_2 = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad r_2 = \frac{1}{3}r_1 \quad \therefore \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad S_2 = \frac{1}{9}S_1$$

$$\text{面積總和} = S + \frac{1}{9}S + \left(\frac{1}{9}\right)^2S + \dots = \frac{S}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}S$$

[例2] 如圖 $\overline{OA_1} = 1$ $\overline{A_1A_2} = \frac{2}{3}$ $\overline{A_2A_3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\overline{A_3A_4} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \dots$ 如此繼續進行，設 A_n 坐標為 (x_n, y_n)



且當 $n \rightarrow \infty$ ，則 $A_n \rightarrow A$ 求 A 點之坐標

提示：橫坐標與縱坐標分開作

$$\text{解答：(1) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{9}{13}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \dots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{6}{13}$$

$$\text{故 } A\left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$$

45 數學歸納法

1. 原理：若集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ ，且滿足下列二條件(1) $1 \in S$ (2) 假定 $k \in S$ ，必有 $k+1 \in S$ ， $S = \mathbb{N}$
2. 証題形式：給一個與自然數 n 有關的命題，欲証其成立(1) 先証： $n=1$ 時所予命題是正確的 (2) 假定 $n=k$ 時原命題為真，利用這個假定，推証 $n=k+1$ 時原命題亦為真
3. 証題精神：(1) 驗證立足點的正確 (2) 延續正確性

[例1] 設 $n \in \mathbb{N}$ ， $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ $Z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin \theta)$

提示：相乘型，於 $n=k$ 時成立式之兩端同乘適當項

解答：(I) $n=1$ 時， $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 顯然成立

(II) 設 $n=k$ 時定理為真，即 $Z^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)$ 成立上式左端乘以 Z ，右端乘以 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 得

$$\begin{aligned} Z^{k+1} &= r^{k+1}(\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r^{k+1}\{(\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + (i \sin k\theta \cos \theta + i \cos k\theta \sin \theta)\} \\ &= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta] \end{aligned}$$

$\therefore n=k+1$ 時，定理成立，故對 $\forall n \in \mathbb{N}$ ，定理恒真

[例2] 証明 $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $n > 2$ ， $5^n > 3^n + 4^n$

提示：注意寫結論時， n 非對任意自然數均成立

(I) 當 $n=3$ 時，左 $= 125 >$ 右 $= 91$

(II) 設 $n=k$ 時命題為真，即 $5^k > 3^k + 4^k$

$$\text{上式兩端同乘以 } 5 \Rightarrow 5^{k+1} > 5(3^k + 4^k) > 3(3^k) + 4(4^k) = 3^{k+1} + 4^{k+1}$$

$\therefore$ 當 $n=k+1$ 時，命題成立 故對 $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $n > 2$ 命題恒真

48 指數不等式、對數不等式

1. 指數不等式： $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$)

$$\textcircled{1} a > 1 \iff f(x) > g(x) \quad \textcircled{2} 0 < a < 1 \iff f(x) < g(x)$$

2. 對數不等式： $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$) $\ast f(x) > 0, g(x) > 0$

$$\textcircled{1} a > 1 \iff f(x) > g(x) \quad \textcircled{2} 0 < a < 1 \iff f(x) < g(x)$$

[例1] 試解 $3^{2x} + 1 < 3^{x+2} + 3^{x-2}$

提示：底數 > 1 ，則不等號方向不變

解答： $(3^x)^2 + 1 < 9 \cdot 3^x + \frac{1}{9} \cdot 3^x$ 令 $3^x = y > 0$ ，則

$$y^2 + 1 < (9 + \frac{1}{9})y \Rightarrow y^2 - (9 + \frac{1}{9})y + 1 < 0 \Rightarrow (y - 9)(y - \frac{1}{9}) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{9} < y < 9 \text{ 即 } 3^{-2} < 3^x < 3^2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

[例2] 滿足 $-1 < \log_{0.1} x - \log_{0.1} 10 < 0$ 之整數 x 有 _____ 個

提示： $0 < (\text{底數}) < 1$ ，去對數不等號方向要改變

解答： $-1 < \log_{0.1} x - \log_{0.1} 10 < 0$ 真數 $x > 0$ 且 $x \in \mathbb{Z}$

$$-1 < \log_{0.1} \frac{x}{10} < 0 \Rightarrow 0.1^{-1} > \frac{x}{10} > (0.1)^0$$

$$10 > \frac{x}{10} > 1 \Rightarrow 100 > x > 10 \text{ 但 } x \in \mathbb{Z} \text{ 故 } x \text{ 值共 } 100 - 10 - 1 = 89 \text{ 個}$$

[例3] 設 $a > 1$ 試解 $x^{\log_a x} < a^3 x^2$

提示：兩端同取以 a 為底的對數

解答： $\because a > 1$ 同取對數以 a 為底

$$(\log_a x)^2 < \log_a a^3 + \log_a x^2 \Rightarrow (\log_a x)^2 < 2\log_a x + 3$$

$$(\log_a x)^2 - 2\log_a x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < \log_a x < 3$$

$$\Rightarrow a^{-1} < x < a^3 \Rightarrow \frac{1}{a} < x < a^3$$