49 距離公式

1. 平面上的距離：

① 平面上兩點$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$之距離為$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

② 點$P(x_1,y_1)$到直線$ax+by+c=0$之距離為$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

③ 兩平行線$ax+by+c_1=0$，$ax+by+c_2=0$　$d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. 空間上的距離：

① 空間中兩點$P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$之距離為

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

② 點$P(x_1,y_1,z_1)$至平面$ax+by+cz+d=0$之距離為

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

③ 兩平行平面$ax+by+cz+d_1=0$，$ax+by+cz+d_2=0$

$$d=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

解題關鍵：三度空間的平面等於二度空間的直線

〔例1〕若正△ABC之三頂點A(3,0)，B(−3,0)，C(0,K)則K之值為何？

提示：利用正△三邊等長

解答：$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}\Longrightarrow\sqrt{(3+3)^2+0}=\sqrt{(0+3)^2+K^2}=\sqrt{(3-0)^2+K^2}$

$$\xrightarrow{\text{平方}} 36=K^2+9=K^2+9\Rightarrow K=\pm3\sqrt{3}$$

〔例2〕若球心為(2,1,0)且與平面$3x+4y+2z=0$相切，則此球半徑r=？

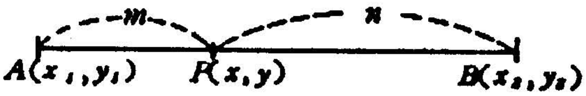
提示：球與平面相切 ∴ 心到平面的距離即為半徑

解答：$r=d=\dfrac{|3(2)+4(1)+2(0)|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{29}}$

50　分點公式

1. 內分點公式：設$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x,y)$

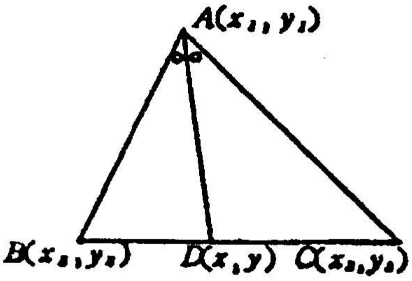
若A－P－B且$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$則點$P(x,y)$之座標為：



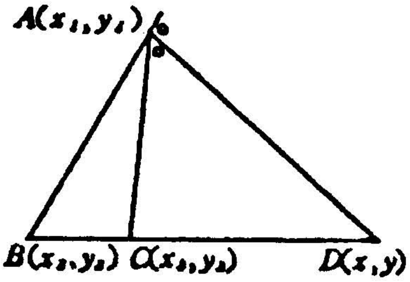
$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}，y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

2. 中點公式：若P為$\overline{AB}$之中點，則$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

① 內分角線定理 ——



② 外分角線定理 ——



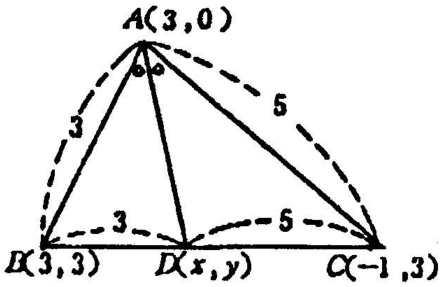
內外分角線定理皆為 ⇒ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$

〔例1〕若點$A(3,-2)$與點$B(1,6)$為圓C直徑的二端，則圓C的圓心座標為何？

提示：$\overline{AB}$為圓C的直徑，∴$\overline{AB}$之中點即為圓心

解答：⇒　$x=\dfrac{3+1}{2}=2$　　　$y=\dfrac{-2+6}{2}=2$

〔例2〕若△ABC之三頂點$A(3,0)$，$B(3,3)$，$C(-1,3)$且∠A之內角平方線交$\overline{BC}$於D，則D點之座標為何？



提示：利用$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$，再利用分點公式

解答：① $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=\dfrac{3}{5}$

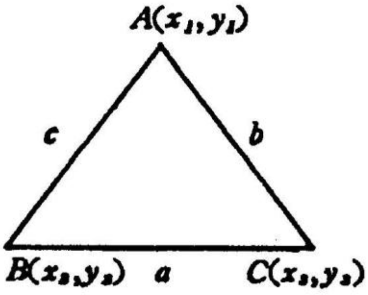
② $D(x,y)\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{5\times3+3(-1)}{3+5}=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{5\times3+3(3)}{3+5}=3 \end{cases}$

51　重心與內心座標公式

設ABC之三頂點$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$　且$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$

1. 重心座標$G(x,y)$

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$



2. 內心座標$I(x,y)$

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\ y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$$

<補充>三角形五心的原理

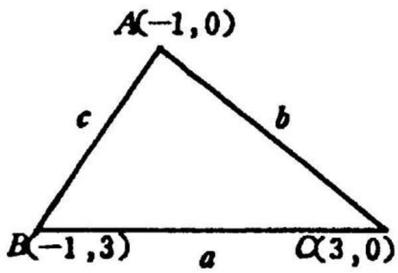
1. 重心：三中線交點
2. 內心：① 三內分角線交點(即內切圓圓心)　② 至三邊等距。
3. 外心：① 三邊中垂線交點(即外接圓圓心)　② 至三頂點等距。
4. 垂心：三高交點

<附註>求三角形五心(重心除外)利用原理較易

<補充>P點到三頂點距離平方和最小，則P即為重心

〔例1〕若△ABC之三頂點$A(-1,0)$，$B(-1,3)$，$C(3,0)$則△ABC之內心$I(x,y)$為何？

提示：△ABC之三邊a,b,c∈Q故利用內心公式

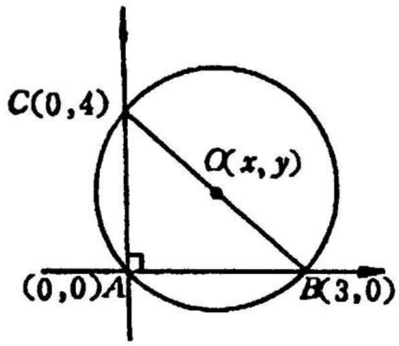


解答：$\because\begin{cases}a=\sqrt{(3+1)^2+3^2}=5\\ b=\sqrt{(3+1)^2+0}=4\\ c=\sqrt{0+3^2}=3\end{cases}$

$$\therefore I(x,y)\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5(-1)+4(-1)+3(3)}{5+4+3}=0\\ y=\dfrac{5(0)+4(3)+3(0)}{5+4+3}=1\end{cases}$$

〔例2〕若△ABC之三頂點$A(0,0)$，$B(3,0)$，$C(0,4)$則△ABC的外心$O(x,y)$為何？

提示：外心到三頂點等距



解答：$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-4)^2}$$

$\xrightarrow{\text{平方}}$　聯立解得$x=\dfrac{3}{2}$　$y=2$

另解：$\because\angle A$恰為直角$\therefore\overline{BC}$即為外接圓直徑$\therefore\overline{BC}$中點即為外心

52 直線的斜率與夾角

1. 斜角：直線與x軸正向之交角，稱為斜角(θ)則$0\leqq\theta<\pi$

2. 斜率：直線的斜率為$m=\tan\theta$ ($\theta\neq\frac{\pi}{2}$)

   ① 在直線上任取兩點$P(x_1,y_2)$，$Q(x_2,y_2)$ 則L直線的斜率$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

   ② 若L之方程式為$ax+by+c=0$且$b\neq0$ 則L直線斜率$m=\frac{-a}{b}$

3. 設二直線L_1與L_2之斜率分別為m_1與m_2則 ① 若$L_1 /\!/ L_2$或$L_1=L_2 \Rightarrow m_1=m_2$

   ② 若$L_1\perp L_2 \Rightarrow m_1\times m_2=-1$

4. 設L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$且L_1與L_2之斜率分別為m_1，m_2

   ① 夾角：$\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

   ② 分角線：$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

   (原理：分角線上一點(x,y)到L_1與L_2等距)

〔例1〕若三直線L_1：$2x+3y=5$，L_2：$x+2y=3$，L_3：$ax-2y=1$不能圍成三角形，則a值為何？

提示：不能圍成△的原因有
① 三線共點
② 三線平行or重合
③ 三線中有兩線平行or重合

解答：① $L_1 /\!/ L_2 \Rightarrow \frac{-2}{3}=\frac{a}{2} \Rightarrow a=-\frac{4}{3}$

② $L_2 /\!/ L_3 \Rightarrow \frac{-1}{2}=\frac{a}{2} \Rightarrow a=-1$

③ 共點$(1,1) \Rightarrow a=3$ ∴a點值可為$-\frac{4}{3}$or，-1 or 3

〔例2〕求與直線L：$2x-y=6$的夾角45°的直線斜率為何？

提示：利用$\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

解答：設所求直線斜率為m

∵$2x-y=6$的斜率為2

∴$\tan45^\circ=\pm\frac{2-m}{1+2m}=1 \Rightarrow 1+2m=\pm(2-m) \Rightarrow m=-3$ or $\frac{1}{3}$

53 平面的直線方程式

1. **一般式**：$ax+by+c=0(a,b,c\in R$且$a^2+b^2\neq 0)$
2. **點斜式**：若斜率為m的直線L過點(x_0,y_0)則：L的直線方程式 $\Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)$
3. **斜截式**：若直線L的斜率為m，且y軸上的截距為b，則：

   L的直線方程式 $\Rightarrow y=mx+b$
4. **兩點式**：直線L過相異兩點$P(x_1,y_1)Q(x_2,y_2)$則L的直線方程式為：

   ① 當$x_1\neq x_2$，$L\Rightarrow (x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1)$

   ② 當$x_1=x_2$，$L\Rightarrow x-x_1=0$
5. **截距式**：直線L在x,y軸上之截距分別為$a,b(a,b\neq 0)$

   則L的直線方程式 $\Rightarrow \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

<補充>① 任何斜率m的直線皆可設為$mx-y=t$

② $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（算術平均≧幾何平均）

〔例1〕過點(2,1)且與直線L：$2x-y=0$垂直的直線方程式為何？

提示：$L_1\perp L_2\Rightarrow m_1\times m_2=-1$

解答：設所求直線斜率為m

$\because mL=2$

$\therefore m\times\alpha=-1\Rightarrow m=\dfrac{-1}{2}$　　∴所求 $\rightarrow x+2y=4$

〔例2〕求直線L過(4,5)在第一象限與兩軸所圍成最小面積為何？

提示：利用截距式$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$與$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$即可

解答：$\because L:\dfrac{4}{a}+\dfrac{5}{b}=1$　則△面積即為$\dfrac{1}{2}ab$

$$\therefore\frac{\frac{4}{a}+\frac{5}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{20}{ab}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\geq\sqrt{\frac{20}{ab}}\xrightarrow{\text{平方}}\frac{1}{4}\geq\frac{20}{ab}\Rightarrow\frac{1}{2}ab\geq 40$$

∴△面積最小值為40

54　面積公式

1. 三角形面積公式：若△ABC之三頂點$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$則其面積為

$$a\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3\right|$$

2. 設凸n邊形的n個頂點$P_1(x_1,y_1)P_2(x_2,y_2)\cdots\cdots P_n(x_n,y_n)$則其面積為：

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & & y_1 \\ x_2 & & y_2 \\ x_3 & & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & & y_n \\ x_1 & & y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_ny_1-x_2y_1-x_3y_2-\ldots-y_nx_1)\right|$$

（速記）：① 將各點依序排列，再重複第一個點。

② 箭頭↘表正，箭頭↙表負。

③ 各點依逆時鐘排列，則其值必為正。

〔例1〕若△ABC中A(2,1)，B(4,3)，C(6,K)且面積為10，則K值為何？

提示：頂點坐標與面積之關係

解答：$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & K \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right|=10 \Rightarrow |6+4K+6-4-18-2K|=20$

$\Rightarrow |2K-10|=20 \Rightarrow K=-5 \text{ or } 15$

〔例1〕若凸五邊形ABCDE中A(1,1)，B(3,8)，C(7,6)，D(8,−2)，E(5,−4)則凸五邊形面積為何？

提示：同上例

解答：$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 8 \\ 7 & 6 \\ 8 & -2 \\ 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|8+18-14-32+5-3-56-48+10+4|$

$=\frac{1}{2}|-108|=54$

54　面積公式

1. 三角形面積公式：若△ABC之三頂點$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$則其面積為

$$a\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3\right|$$

2. 設凸n邊形的n個頂點$P_1(x_1,y_1)P_2(x_2,y_2)\cdots\cdots P_n(x_n,y_n)$則其面積為：

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & & y_1 \\ x_2 & & y_2 \\ x_3 & & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & & y_n \\ x_1 & & y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_ny_1-x_2y_1-x_3y_2-\ldots-y_nx_1)\right|$$

（速記）：① 將各點依序排列，再重複第一個點。

② 箭頭↘表正，箭頭↙表負。

③ 各點依逆時鐘排列，則其值必為正。

〔例1〕若△ABC中$A(2,1)$，$B(4,3)$，$C(6,K)$且面積為10，則K值為何？

提示：頂點坐標與面積之關係

解答：$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & K \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right|=10 \Rightarrow |6+4K+6-4-18-2K|=20$

$\Rightarrow |2K-10|=20 \Rightarrow K=-5$ or 15

〔例1〕若凸五邊形ABCDE中$A(1,1)$，$B(3,8)$，$C(7,6)$，$D(8,-2)$，$E(5,-4)$則凸五邊形面積為何？

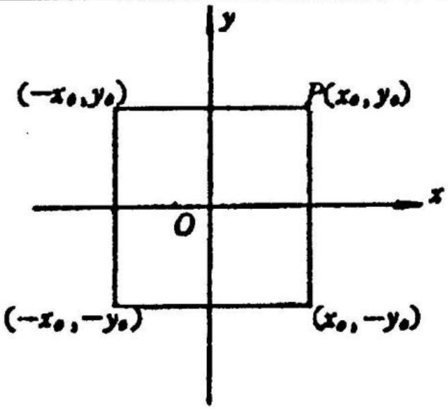
提示：同上例

解答：$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 8 \\ 7 & 6 \\ 8 & -2 \\ 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|8+18-14-32+5-3-56-48+10+4|$

$=\frac{1}{2}|-108|=54$

55　對稱公式

設$P(x_0,y_0)$，$L：ax+by+c=0$



1. ① P對x軸之對稱點$(x_0,-y_0)$，垂足點$(x_0,0)$

   ② P對y軸之對稱點$(-x_0,y_0)$，垂足點$(0,y_0)$

   ③ P對O點之對稱點$(-x_0,-y_0)$

   ④ P對$ax+by+c=0$

   對稱點：

   $$\begin{cases} x=x_0-\dfrac{2a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \\ y=y_0-\dfrac{2b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \end{cases}$$

   垂足點：

   $$\begin{cases} x=x_0-\dfrac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \\ y=y_0-\dfrac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \end{cases}$$

2. **特例：(對稱直線之斜率為+1或−1)**

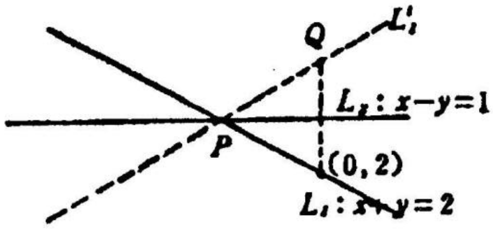
   ① P對$x+y=k$之對稱點$(k-y_0,k-x_0)$

   ② P對$x-y=k$之對稱點$(k+y_0,x_0-k)$

〔例1〕求$L_1：2x+y=2$對稱於$L_2：x-y=1$的直線方程式

提示：利用＜補充＞②

解答：$P：\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow (1,0)$



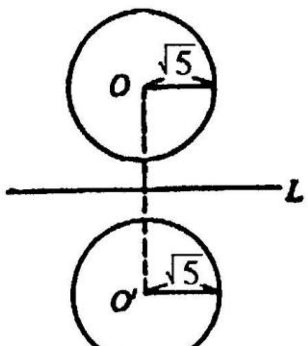
$$Q：\begin{cases} x=0-\dfrac{2(0-2-1)}{2} \\ y=2-\dfrac{2(-1)(0-2-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow (3,-1)$$

$\because m_{\overline{PQ}}=\dfrac{-1}{2}$　$\therefore L' \Rightarrow x+2y-1=0$

〔例2〕求圓$C：(x-1)^2+(y-1)^2=5$對於$L：x+2y=0$的對稱圖形方程式

提示：利用＜補充①＞

解答：$O=(1,1)$



$$O'：\begin{cases} x=1-\dfrac{2(1)(1+2)}{5} \\ y=1-\dfrac{2(2)(1+2)}{5} \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{7}{5}\right)$$

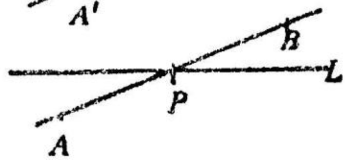
$\therefore$所求 $\Rightarrow (x+\dfrac{1}{5})^2+(y+\dfrac{7}{5})^2=5$

56 對稱公式的應用

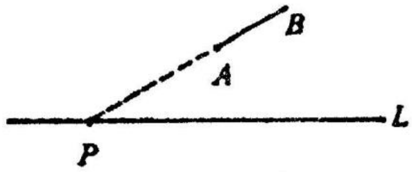
1. 在平面上有二定點A,B及直線L，試在L上求得一點P使得$\overline{PA}+\overline{PB}$之值最小

   ① 當A,B在L同側時，若A'為A之對稱點則$\overline{A'B}$與L之交點P即為所求

   ② 當A,B在L異側時，$\overline{AB}$與L之交點P即為所求

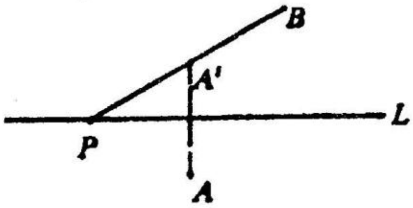


2. 在平面上有二定點A,B及直線L，試在L上求得一點P使得$|\overline{PA}-\overline{PB}|$之值最大

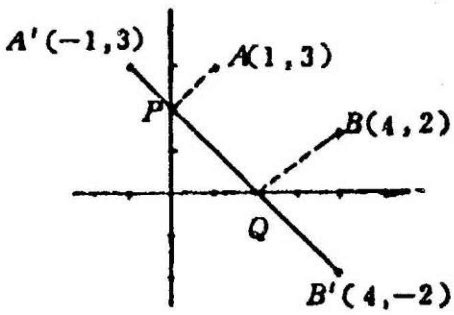


   ① 當A,B在L同側時，直線$\overleftrightarrow{AB}$與L之交點P即為所求

   ② 當A,B在L異側時，若A'為A之對稱點則直線$\overleftrightarrow{A'B}$與L之交點P即為所求



〔例1〕若A(1,3)，B(4,2)，P在y軸上，Q在x軸上，則$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$的最小值為何？



提示：所求即為$\overline{A'B'}$

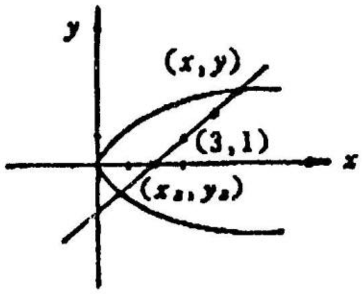
解答：$A'=(-1,3)$，$B'=(4,-2)$

$\overline{A'B'}=\sqrt{(4+1)^2+(3+2)^2}=5\sqrt{2}$

〔例2〕若$y^2=4x$之一弦中點$(3,1)$，則此弦方程式為何？

提示：利用$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

解答：設弦方程式 $\Rightarrow mx-y=3m-1$



$\Rightarrow x=\dfrac{y+3m-1}{m}$ 代入$y^2=4x$

$\Rightarrow y^2=4\times\dfrac{y+3m-1}{m}$

$\Rightarrow y^2-\dfrac{4y}{m}-\dfrac{12m-4}{m}=0$

$\because (3,1)=(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$

又$y_1+y_2=\dfrac{4}{m}=2$ $\therefore m=2$ $\therefore$所求 $\rightarrow 2x-y=5$

57　線性計劃

1. **定義**：在一個凸多邊形之限制下，欲求一次函數$f(x,y)=ax+by+c$之最大或最小值的問題，稱為線性計劃

2. **基本模式**：

限制條件：$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1\leqq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2\leqq 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_nx+b_nx+c_n\leqq 0 \end{cases}$

目的函數：$f(x,y)=ax+by+c$

3. **求解方法**：

① 將所予條件化成x，y的不等式組

② 求出不等式組所滿足的領域及其頂點

③ 線性計劃最適當的解常發生在領域的頂點或邊界上

〔例1〕在$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq 4$，$x+2y\leqq 6$條件下求$5x-2y$之最大值M與最小值m

提示：線性規劃M，m落在頂點上

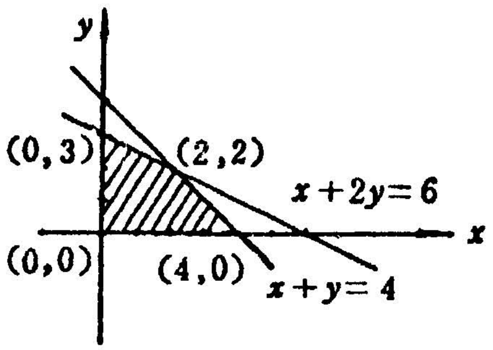
解答：$\begin{cases} x+2y=6 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow (2,2)$

$f(2,2)=10-4=6$

$f(4,0)=20$ ……M

$f(0,3)=-6$ ……m

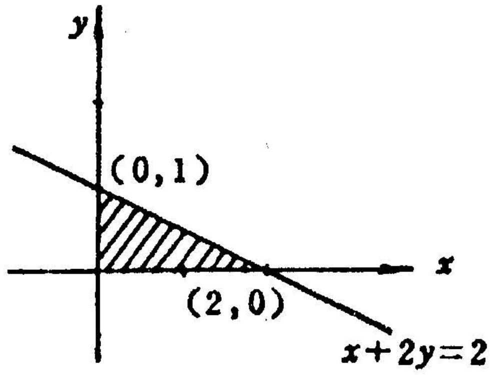
$f(0,0)=0$



〔例2〕求$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\,(x+2y-2)\leqq 0$的面積的最大值

提示：即求$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+2y\leqq 2$所圍成的面積

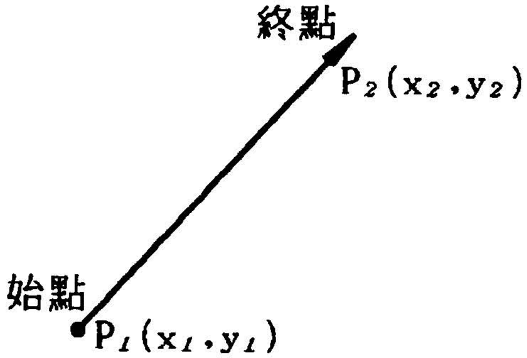
解答：所求 $\Rightarrow \frac{1}{2}\times 1\times 2=1$



58 向量的基本運算

1. $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

2. $\vec{A}$,$\vec{B}$長度相同且方向相同 $\Rightarrow$ $\vec{A}=\vec{B}$



3. $\vec{A}=(x,y)$ $\Rightarrow$ $|\vec{A}|=\sqrt{x^2+y^2}$(表長度)

4. 向量加法的性質：

① 交換性：$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

② 結合性：$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

③ 零向量：始點與終點重合的有向線段所表之向量

④ 可逆性：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$

⑤ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

5. $\vec{x}/\!/\vec{y}$ $\Rightarrow$ $\vec{x}=t\vec{y}$ (分量成比例)

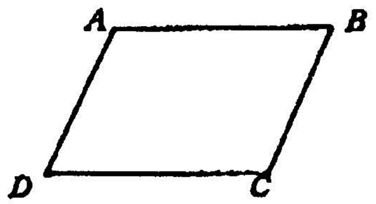
6. 向量加減法的座標表示：

設$\vec{A}=(x_1,y_1)$，$\vec{B}=(x_2,y_2)$則

① $\vec{A}+\vec{B}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

② $\vec{A}-\vec{B}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$

<補充>平行四邊行ABCD



$\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{D}$

〔例1〕設平行四邊形ABCD，其中A(−2,2)，B(4,−3)，C(3,1)則D點座標為何？

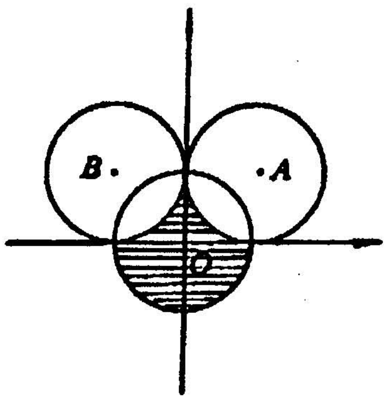
提示：利用<補充>中$\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{D}$

解答：$D\begin{cases} x=-2+3-4=-3 \\ y=2+1+3=6 \end{cases}$

〔例2〕若O(0,0)，A(2,2)，B(−2,2)點集合

$S=\{P \mid |\overrightarrow{OP}|\leq 2, |\overrightarrow{PA}|\geq 2,$

$|\overrightarrow{PB}|\geq 2\}$之面積為何？



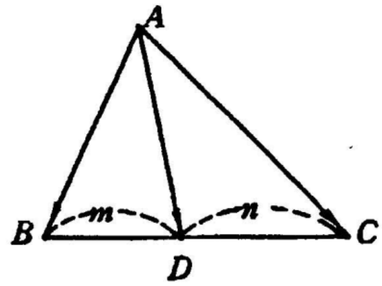
解答：$S=4\pi-4(\dfrac{4\pi}{4}-2)=8$

59 向量分點表示與內積

1. 分點表示：如右圖若$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{m}{n}$則

① $\overrightarrow{AD}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

② 令$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$若B,D,C共線　則$x+y=1$



2. 內積：若A為$\vec{a}$,$\vec{b}$之夾角 ⇒

① 定義：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos A=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

② 內積運算：$\vec{A}=(x_1,y_1)$，$\vec{B}=(x_2,y_2)$ ⇒ $\vec{A}\cdot\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2$

③ 絕對值定義：$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\times|\vec{a}|\cos A=|\vec{a}|^2$ ($\because A=0\quad\therefore\cos 0=1$)

④ 垂直定理：$\vec{a}\perp\vec{b}$ ⇒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ($\because A=\dfrac{\pi}{2}\quad\therefore\cos\dfrac{\pi}{2}=0$)

⑤ 夾角公式：$\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$

〔例1〕△ABC三頂點坐標為A(2,3)，B(5,1)，C(0,−2)　則　$AB\cdot BC=$Ⓐ9　Ⓑ6　Ⓒ−9　Ⓓ−6

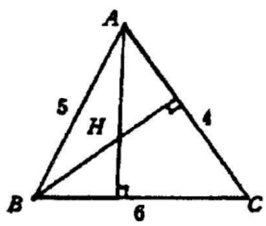
提示：$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=a_1b_1+a_2b_2$

解答：$\overrightarrow{AB}=(5,1)-(2,3)=(3,-2)$　　$\overrightarrow{BC}=(0,-2)-(5,1)=(-5,-3)$

$AB\cdot BC=-15+6=-9$

〔例2〕△ABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=6$，H為垂心，若$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$x+y=$？

提示：垂心與外心利用內積處理

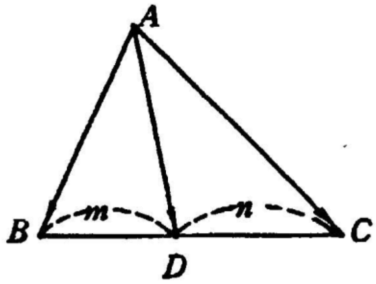


解答：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(5^2+4^2-6^2)=\dfrac{5}{2}$　　$\because\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$

又$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}\dfrac{5}{2}=25x+\dfrac{5}{2}y\\ \dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}x+16y\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}x=\dfrac{3}{35}\\ y=\dfrac{1}{7}\end{cases}$

59 向量分點表示與內積

1. 分點表示：如右圖若$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{m}{n}$則



① $\overrightarrow{AD}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

② 令$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$若B,D,C共線　則$x+y=1$

2. 內積：若A為$\vec{a}$,$\vec{b}$之夾角 $\Rightarrow$

① 定義：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos A=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

② 內積運算：$\vec{A}=(x_1,y_1)$，$\vec{B}=(x_2,y_2)$ $\Rightarrow$ $\vec{A}\cdot\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2$

③ 絕對值定義：$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\times|\vec{a}|\cos A=|\vec{a}|^2$ ($\because A=0$　$\therefore \cos 0=1$)

④ 垂直定理：$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ($\because A=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore \cos\dfrac{\pi}{2}=0$)

⑤ 夾角公式：$\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$

〔例1〕△ABC三頂點坐標為A(2,3)，B(5,1)，C(0,−2)　則　$AB\cdot BC=$ Ⓐ9　Ⓑ6　Ⓒ−9　Ⓓ−6

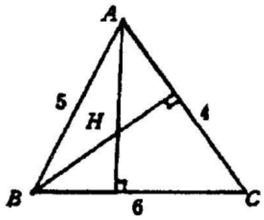
提示：$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=a_1b_1+a_2b_2$

解答：$\overrightarrow{AB}=(5,1)-(2,3)=(3,-2)$　　$\overrightarrow{BC}=(0,-2)-(5,1)=(-5,-3)$

$AB\cdot BC=-15+6=-9$

〔例2〕△ABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=6$，H為垂心，若$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$x+y=$？

提示：垂心與外心利用內積處理



解答：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(5^2+4^2-6^2)=\dfrac{5}{2}$　　$\because\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$

又$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}\dfrac{5}{2}=25x+\dfrac{5}{2}y\\ \dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}x+16y\end{cases}$　$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{35}\\ y=\dfrac{1}{7}\end{cases}$

60　三角形的心與向量的關係

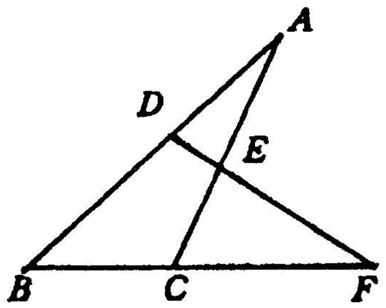
1. 重心：① $\triangle ABC$中，G為$\triangle ABC$之重心 $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

② P為$\triangle ABC$內一點且$x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，$(x>0，y>0，z>0)$

$\Rightarrow \triangle PBC：\triangle PCA：\triangle PAB=x：y：z$

③ G為$\triangle ABC$之重心 $\Rightarrow \overrightarrow{PG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$(P為任一點)

2. 內心：I為$\triangle ABC$之內心則$\overrightarrow{OI}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$



<補充> 孟氏定理 $\Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$

〔例1〕設$\triangle ABC$為圓$(x-1)^2+(y-1)^2=4$之內接正三角形則$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$(O表原點)之值為何？

提示：圓內接正三角形則此圓圓心為$\triangle ABC$的重心亦為外心

解答：重心G(1,1)亦為外心

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

原式$=|3\overrightarrow{OG}|=|3,(1,1)|=3\sqrt{2}$

〔例2〕設$\triangle ABC$外心O，外接圓半徑10，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$則$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=$？

提示：圓周角為圓心角的一半

解答：
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2&=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\\&\quad+2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\\&=100+100+100+2(100\times\cos90°+100\times\cos120°\\&\quad+100\times\cos150°)\\&=200-100\sqrt{3}\end{aligned}$$

61 空間向量

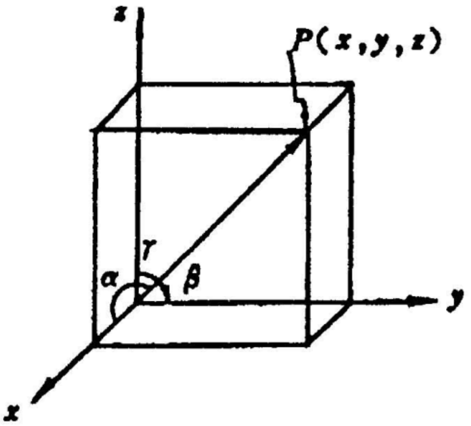
1. 空間座標：

① $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

② $\vec{x}/\!/\vec{y}$ $\Rightarrow$ $\vec{x}=t\vec{y}$(分量成比例)

③ $\vec{A}=(x,y,z)$ $\Rightarrow$ $|\vec{A}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$(表長度)

<註>空間向量運算方法同平面向量



2. 空間向量

若$0\leqq\alpha,\beta$，$\gamma\leqq\pi$(方向角)

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$為方向餘弦

$$\text{則}\begin{cases} x=|\vec{p}|\cos\alpha \\ y=|\vec{p}|\cos\beta \\ z=|\vec{p}|\cos\gamma \end{cases} \quad \begin{aligned}\therefore\vec{p}&=(x,y,z)\\&=|\vec{p}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\end{aligned}$$

※$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

〔例1〕設$P(1,2,3)$若$\overline{PQ}$之方向角為$45^\circ,60^\circ,120^\circ$若$|\overrightarrow{PQ}|=6$求Q點座標

提示：方向角已知利用方向餘弦求點座標

解答：設$Q=(x,y,z)$

$\because\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$\Rightarrow(x-1,y-2,z-3)=6(\cos45^\circ,\cos60^\circ,\cos120^\circ)=(3\sqrt{2},3,-3)$

$\therefore Q(1+3\sqrt{2},5,0)$

〔例2〕$\vec{a}=(1,-2,1)$，$\vec{b}=(1,1,-1)$對任意實數t當$t=$________時$|\vec{a}+t\vec{b}|$有最小值m

提示：利用配方法求極值

解答：$t\vec{b}=(t,t,-t)$ $\therefore\vec{a}+t\vec{b}=(1+t,-2+t,1-t)$

$\therefore|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(t+1)^2+(t-2)^2+(t-1)^2}=\sqrt{3t^2-4t+6}$

$=\sqrt{3(t-\frac{2}{3})^2+\frac{14}{3}}$ $\therefore$當$t=\frac{2}{3}$時有$m=\sqrt{\frac{14}{3}}$

62 空間向量的內積與外積

1. 內積及其應用：(平面向量的推廣)

設$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$為空間中兩非零向量其夾角為θ，$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

① 內積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

② $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

③ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

2. 外積：設$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$為三度空間向量

① 定義：$\vec{a}$與$\vec{b}$的外積$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

② $\vec{a}\times\vec{b}$的幾何意義表$\vec{a}$與$\vec{b}$的公垂向量

③ $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$

④ $|\vec{a}\times\vec{b}|$表$\vec{a}$與$\vec{b}$所張之平行四邊形面積

⑤ $\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}|\times|\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\wedge\vec{b}|$

〔例1〕若A(2,1,3)，B(1,2,2)，C(−1,−1,4)則cosA=？

提示：利用內積求cosA之值

解答：$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-1)$　　$\overrightarrow{AC}=(-3,-2,1)$

$$\therefore\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|}=\frac{3-2-1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{26}}=0$$

〔例2〕由空間中兩向量$\vec{a}=(2,1,4)$，$\vec{b}=(1,4,2)$所決定的平行四邊形面積為何？

提示：兩向量所張之平行四邊形面積用公式求

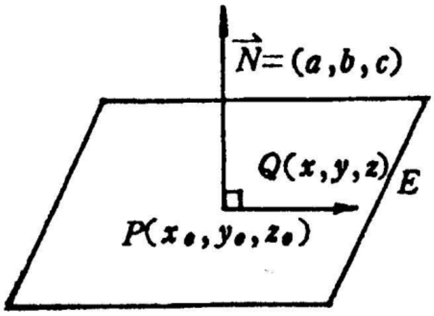
解答：所求$=\sqrt{(|\vec{a}|\times|\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{(\sqrt{21}\cdot\sqrt{21})^2-(2+4+8)^2}$

$=\sqrt{21^2-14^2}=7\sqrt{5}$

63 空間中的平面

1. **法向量**：空間中，垂直平面的任何非零向量

$\overrightarrow{N}=(a,b,c)$稱為平面的法向量



2. **平面的一般式**：$ax+by+cz+d=0$

〔其中(a,b,c)表平面的法向量〕

3. **過兩相交平面交線之平面**：設兩相交平面E_1：

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$及E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$則過E_1,E_2交線平面為：

$\Rightarrow\ \ell(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+m(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0\quad(\ell,m\in R,\ \ell^2+m^2\neq 0)$

4. **平面的交角**：設兩相異平面$\begin{cases}E_1:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & \Rightarrow \overrightarrow{N_1}=(a_1,b_1,c_1)\\ E_2:a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & \Rightarrow N_2=(a_2,b_2,c_2)\end{cases}$

① 若θ表兩平面之交角則$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|N_1|\ |N_2|}$
(其中$0\leqq\theta\leqq\pi$)

② $E_1\perp E_2$即$\overrightarrow{N_1}\perp\overrightarrow{N_2}\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

③ $E_1/\!/E_2$即$\overrightarrow{N_1}/\!/\overrightarrow{N_2}\Leftrightarrow a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$

<補充>平面的對稱公式同二度空間的直線對稱公式

〔例1〕設E_1：$x+y+2z-3=0$，E_2：$x+2y-z-5=0$，$A(1,1,1)$，則過A而與E_1E_2均垂直之平面E之方程式為何？

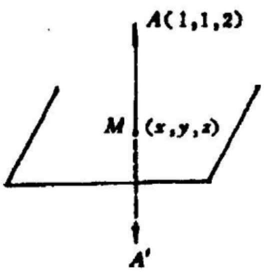
提示：求平面方程式先求其法向量

解答：設所求平面為$ax+by+cz=1$　　　聯立解

則 $\begin{cases}(a,b,c)\cdot(1\ 1\ 2)=0\\(a,b,c)\cdot(1\ 2\ -1)=0\\a+b+c=1\end{cases}$　　$\begin{cases}a+b+2c=0\\a+2b-c=0\\a+b+c=1\end{cases}$ 得$a=5$，$b=-3$，$c=-1$

〔例2〕空間中一點$A(1,1,2)$關於平面$x+y+2z=2$之對稱點為＿＿＿＿＿＿。

解答：$(x-1,y-1,z-2)=t(1,1,2)$　　$M\Rightarrow\begin{cases}x=t+1\\y=t+1\\z=2t+2\end{cases}$ 代入平面



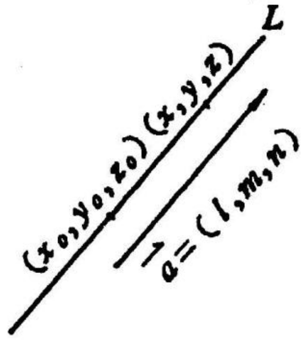
$(t+1)+(t+1)+2(2t+2)=2\Rightarrow t=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore M:(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$　$A'\Rightarrow(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3})$

64 空間中的直線

1. 方向向量：設非零向量$\vec{a}=(\ell,m,n)$與直線L平行則稱$\vec{a}$為L的方向向量。
   註：$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=t(\ell,m,n)$

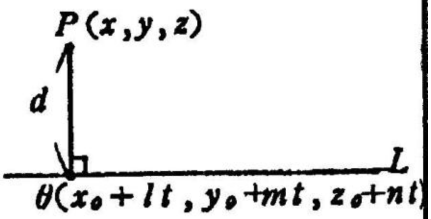
2. 直線的對稱式與參數式



對稱比例式	參數式
$\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 其中ℓ，m，n均不為0	$\begin{cases}x=x_0+\ell t\\y=y_0+mt，t\in R\\z=z_0+nt\end{cases}$

4. 距離：(解題關鍵)

   ① 點到直線距離：a.利用直線參數式設L上一點Q
   b.利用配方法求$\overline{PQ}$的最小值，則此最小值即為點到直線的距離。



   ② 兩歪斜線的距離：a.利用兩歪斜線的方向向量$\vec{\alpha},\vec{\beta}$求出$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$。($\vec{N}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$)
   b.利用N設通過兩歪斜線的兩平行面，則兩平面距離即為所求。

〔例1〕求過點(1.1,−2)且與直線 $\begin{cases}x-2y+z=0\\2x+y-z=-1\end{cases}$ 平行的直線方程式

解答：直線 $\begin{cases}x-2y+z=0\\2x+y-z=-1\end{cases}$ 之方向向量 ⇒ (1,3,5)

故所求 ⇒ $x-1=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$

〔例2〕設L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2$：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$則兩歪斜線的最小距離為何？

提示：以L_1與L_2作二平行面，則兩平面距離即為所求。

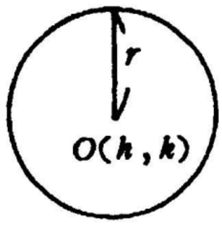
解答：$\vec{N}\perp(2,1,-1)$
$\vec{N}\perp(1,2,2)$
$\Rightarrow \vec{N}=(4,-5,3)$

∴ $E_1 \Rightarrow 4x-5y+3z=23$
$E_2 \Rightarrow 4x-5y+3z=-5$

$d=\dfrac{|23+5|}{\sqrt{4^2+5^2+3^2}}=\dfrac{28}{5\sqrt{2}}$

65 圓與球的方程式

圓：1. 標準式：設圓心為(h,k)半徑r，則此圓方程式 $\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



2. 一般式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$$\xrightarrow{\text{配方}} (x+\frac{d}{2})^2+(y+\frac{e}{2})^2=\frac{1}{4}(d^2+e^2-4f)$$

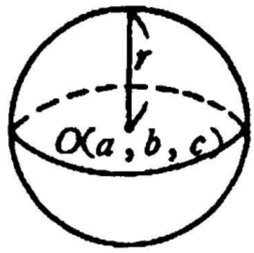
3. 圓的判別式：$\Delta=d^2+e^2-4f$

① 當$\Delta>0$時，表一圓，圓心$(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$，半徑$r=\frac{1}{2}\sqrt{d^2+c^2-4f}$

② 當$\Delta=0$時，表一點$(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$，稱為點圓

③ 當$\Delta<0$時，無圖形，稱為虛圓

球：1. 標準式：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$



2. 一般式：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

3. 體積：$\frac{4}{3}\pi r^3$

4. 表面積：$4\pi r^2$

解題關鍵：三度空間的球等於二度空間的圓。

〔例1〕當$3x^2+(a-b+2)xy+by^2+6x+3y+c=0$圖形為一圓時求$a+b$之值為何？c之範圍

解答：∵圖形為圓 $\therefore a-b+2=0$ 且$b=3$ $\therefore a=1 \Rightarrow a+b=4$

原式 $\Rightarrow 3x^2+3y^2+6x+3y+c=0 \quad \Rightarrow x^2+y^2+2x+y+\frac{c}{3}=0$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{-c}{3}+\frac{5}{4}>0$$

$$\Rightarrow \frac{15-4c}{12}>0 \quad \therefore c<\frac{15}{4}$$

〔例2〕平面$x+y+z=4$截球面$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$於一圓則此圓面積為何？

解答：$d=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad r_1=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

所求 $\Rightarrow \pi r^2=\frac{2}{3}\pi$

66 圓之切線方程式求法

1. 設切點(x_1, y_1)在圓上，過此點作圓的切線：

   ① $x^2+y^2+dx+ey+f=0$之切線方程式為：

   $$xx_1+yy_1+\frac{d}{2}(x+x_1)+\frac{e}{2}(y+y_1)+f=0$$

   ② $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$之切線方程式為：$(x-h)(x_1-h)+(y-k)(y_1-k)=r^2$

2. 設(x_1, y_1)在圓外，過此點作圓之切線

   ① 令切線方程式為$y-y_1=m(x-x_1)$

   ② 利用圓心到切線的距離等於半徑，求出m值代入①即為所求

3. 設切線斜率m則

   ① $x^2+y^2=r^2 \xrightarrow{\text{切線}} y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$

   ② $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \xrightarrow{\text{切線}} (y-k)=m(x-h)\pm r\sqrt{1+m^2}$

〔例1〕過點$(-2,1)$，關於$x^2+y^2+2x-1=0$之切線方程式為何？

提示：∵切點在圓上故直接代入公式即可

解答：切線 $\Rightarrow (-2)x+y\times(1)+2\times\frac{(x-2)}{2}-1=0$

$\Rightarrow -2x+y+x-2-1=0$

$\Rightarrow x-y+3=0$

〔例2〕已知斜率為2且與圓$(x-1)^2+(y-1)^2=4$相切的切線方程式＝？

提示：切線到圓心距離等於該圓半徑

解答：設切線 $\Rightarrow 2x-y=t$　　又圓心O：$(1,1)$

$d=r \Rightarrow \frac{|2-1-t|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2 \Rightarrow |1-t|=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow t=1+2\sqrt{5}$ or $1-2\sqrt{5}$

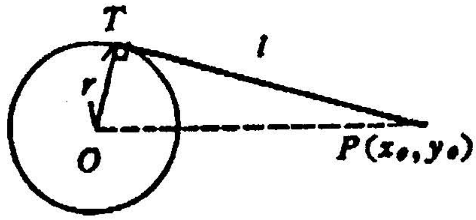
∴切線為 $2x-y=1+2\sqrt{5}$ or $2x-y=1-2\sqrt{5}$

67 圓的切線長

1. 定義：過圓外一點P，作圓的切線，由P至切點T之距離$\overline{PT}$稱為點P至圓的切線長

2. 求法：① 設$P(x_0, y_0)$為圓$C:(x-h)^2+(y-k)^2$
$=r^2$外一點則點P到圓C的切線長

$$\ell=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2+r^2}$$



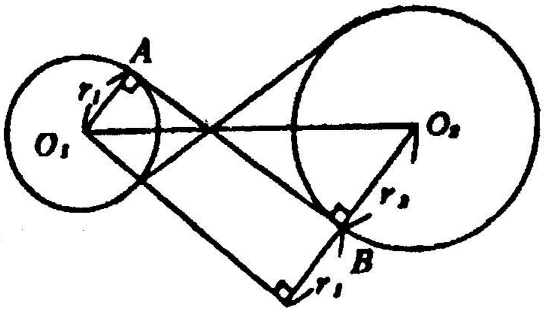
② 設$P(x_0, y_0)$為圓$C:x^2+y^2+dx+ey+f=0$外一點，則點P到圓C的切線長

$$\ell=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f}$$

<速解>切線長求法可利用畢定氏定理 ⇒ $\ell=\sqrt{\overline{OP}^2-r^2}$

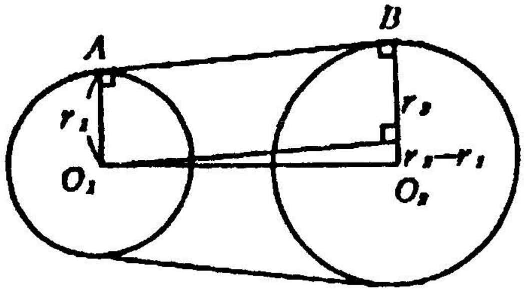
<補充>內外公切線長求法 ——

① 內公切線長 ——



$\overline{AB}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$

② 外公切線長 ——



$\overline{AB}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$

〔例1〕設$O_1:x^2+y^2=1$，$O_2:(x-3)^2+(y-4)^2=4$則求二圓之內外公切線長

解答：$\overline{O_1O_2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

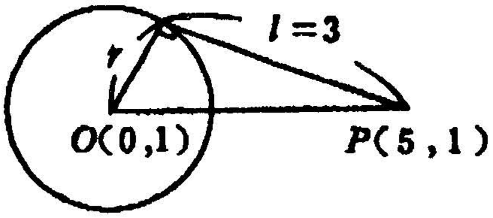
① 內公切線長$=\sqrt{5^2-3^2}=4$

② 外公切線長$=\sqrt{5^2-1}=2\sqrt{6}$

〔例2〕已知點P(5,1)至圓心(0,1)的切線長為3則此圓之方程式為何？

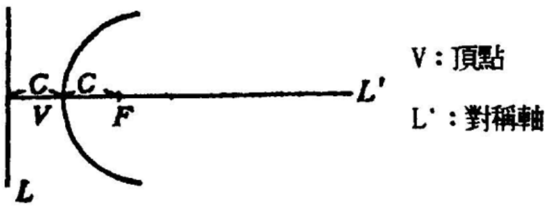
解答：$r=\sqrt{\overline{OP}^2-\ell^2}=\sqrt{25-9}$ ∴$r=4$

∴所求 ⇒ $x^2+(y-1)^2=16$



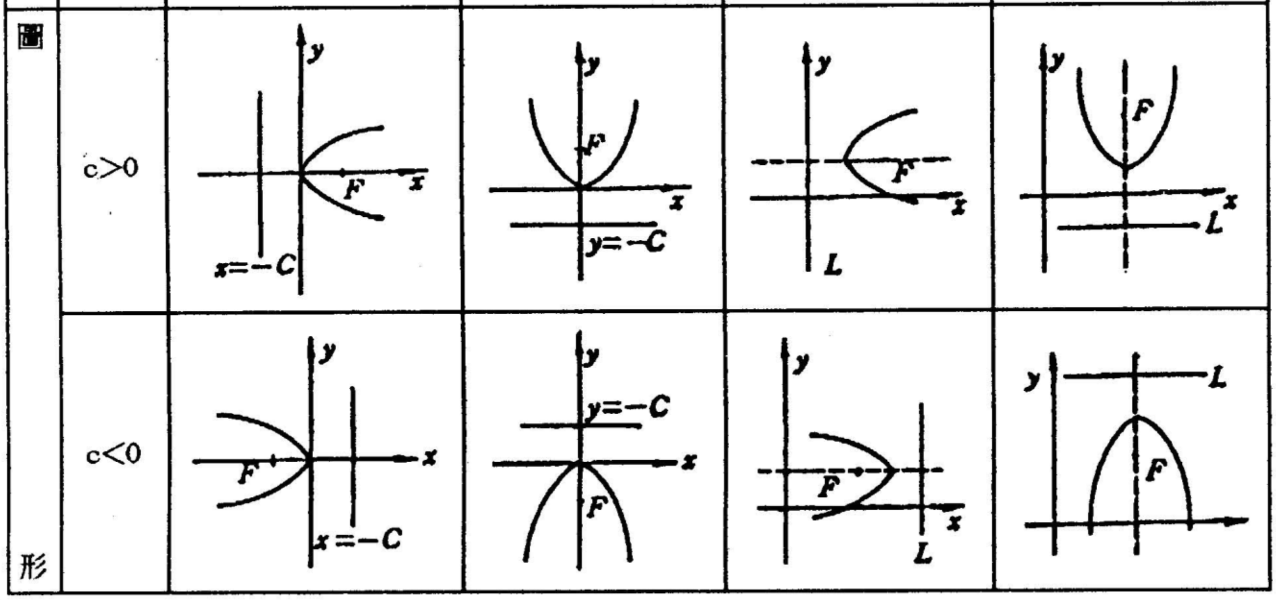
68 拋物線方程式

1. **定義**：在平面上，一動點P至一定點F(焦點)及一定直線L(準線)之距離相等，則此動點P之軌跡稱為拋物線

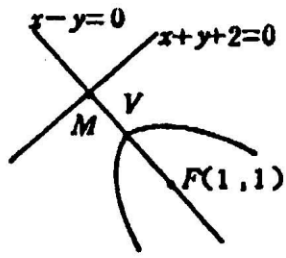


2. **基本示範**：

方程式		$y^2=4cx$	$x^2=4cy$	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(x-h)^2=4c(y-k)$
頂點		(0,0)	(0,0)	(h,k)	(h,k)
焦點		(c,0)	(0,c)	(h+c,k)	(h,k+c)
準線		$x=-c$	$y=-c$	$x=h-c$	$y=k-c$
正焦弦之長		$4\|c\|$	$4\|c\|$	$4\|c\|$	$4\|c\|$
開口	$c>0$	向右	向上	向右	向上
	$c<0$	向左	向下	向左	向下



〔例1〕設拋物線準線為$x+y+2=0$焦點F(1,1)則其拋物線方程式為何？

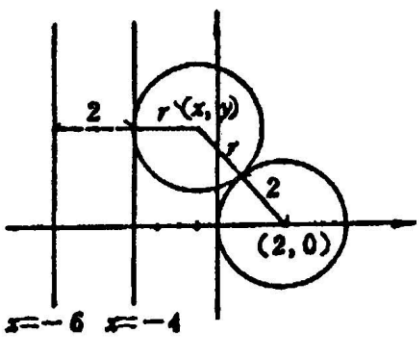


提示：利用拋物線上一點至準線距離等於到焦點距離求之

解答：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{(x+y+2)^2}{2}$ $\Rightarrow x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$

〔例2〕設圓C與圓$(x-2)^2+y^2=4$外切及直線$x+4=0$相切則動圓C之圓心所成之圖形方程式為何？



提示：即求準線$x=-6$，焦點(2,0)之拋物線

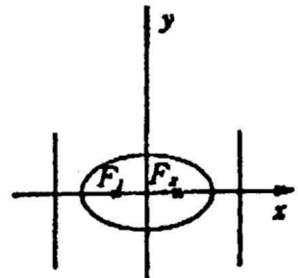
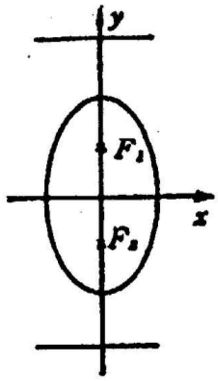
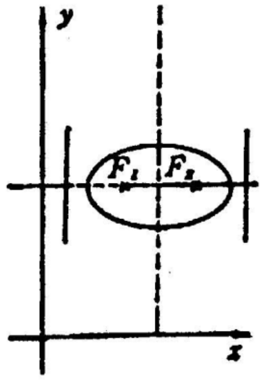
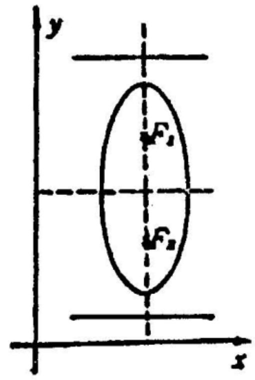
解答：$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=r+2=x+6$

$\Rightarrow x^2-2x+4+y^2=x^2+12x+36$ $y^2=14x+32$

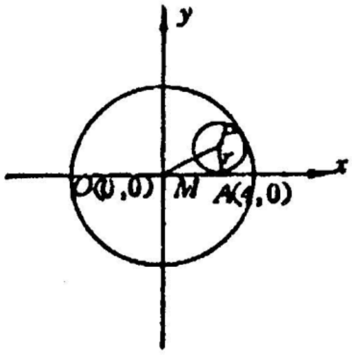
69 橢圓方程式

1. 定義：設F_1,F_2為兩焦點，2a為長軸長，滿足$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，設$\overline{F_1F_2}=2c$ $\Rightarrow$ $2a>2c$

2. 基本示範：$a>b>0$，$a^2=b^2+c^2$（速記：橢圓a最大）

方程式	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
中(M)心	$(0,0)$	$(0,0)$	(h,k)	(h,k)
長軸頂點	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
短軸頂點	$(0,\pm b)$	$(\pm b,0)$	$(h,k\pm b)$	$(h\pm b,k)$
焦　點	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
長軸長	$2a$	$2a$	$2a$	$2a$
短軸長	$2b$	$2b$	$2b$	$2b$
正焦弦長	$2b^2/a$	$2b^2/a$	$2b^2/a$	$2b^2/a$
圖形				

〔例1〕設一圓通過$(4,0)$且與圓$x^2+y^2=25$內切，則此圓圓心P之軌跡方程式為何？



解答：$\begin{cases}\overline{AP}=r\\ \overline{OP}=5-r\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\sqrt{(x-4)^2+y^2}=r & \text{①}\\ \sqrt{x^2+y^2}=5-r & \text{②}\end{cases}$

①+② $\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}=5$　　$\therefore F(4,0)(0,0)$

$\therefore M=(2,0)$ 且 $a=\frac{5}{2}$，$c=2$，$b=\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{3}{2}$

$\therefore$ 所求 $\frac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$

〔例2〕圖形$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}=8$正焦弦長為何？

解答：$2c=\sqrt{9+16}$ $\Rightarrow c=\frac{5}{2}$

$2a=8 \Rightarrow a=4$

$b^2=a^2-c^2=16-\frac{25}{4}=\frac{39}{4}$

所求$=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times\frac{39}{4}}{4}=\frac{39}{8}$

70 橢圓的參數式與相關幾何量

1. 參數式：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之參數式 $\Rightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$

2. 面積：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之面積為$\pi ab$

3. 相關：設橢圓T：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

① 內接正方形 $\Rightarrow \begin{cases} 面積=4a^2b^2/a^2+b^2 \\ 周長=8ab/\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

② 內接矩形 $\Rightarrow \begin{cases} 面積最大值=2ab \\ 周長最大值=4\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

③ 外切矩形 $\Rightarrow \begin{cases} 面積最大值=2(a^2+b^2) \\ 面積最小值=4ab \end{cases}$

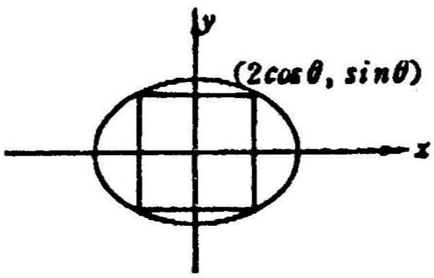
④ 內接三角形 $\Rightarrow$ 面積最大值$=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$

⑤ P,Q為橢圓上二點，Q為中心，則△OPQ面積最大值$=\frac{1}{2}ab$

〔例1〕參數方程式$\begin{cases} x=1-2\cos\theta \\ y=-1+3\sin\theta \end{cases}$ 在坐標平面上所表的圖形方程式為何？

解答：$\begin{cases} \cos=\frac{x-1}{-2} & \text{——①} \\ \sin\theta=\frac{y+1}{3} & \text{——②} \end{cases}$ $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

〔例2〕橢圓$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$內接矩形最大面積為何？



解答：$A=4(2\cos\theta)(\sin\theta)$

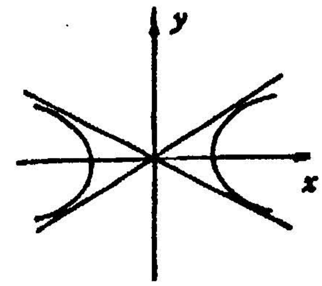
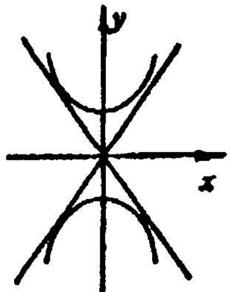
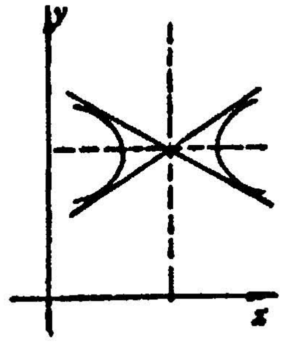
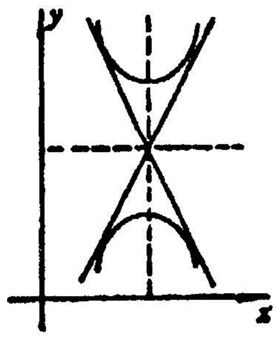
$=4\sin2\theta=4$

另解：所求$=2ab=2\times2\times1=4$

71 雙曲線方程式

1. **定義**：設F_1,F_2為兩焦點，2a為貫軸長，滿足$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$則P之圖形即為雙曲線，設$\overline{F_1F_2}=2c$ → (2a<2c)

2. **基本示範**：$a>0,b>0$，$c^2=a^2+b^2$(速記：雙曲線c最大)

雙曲線標準式	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
中(M)心	(0,0)	(0,0)	(h,k)	(h,k)
頂　點	(±a,0)	(0,±a)	(h±a,k)	(h,k±a)
焦　點	(±c,0)	(0,±c)	(h±c,k)	(h,k±c)
貫軸長	2a	2a	2a	2a
共軛長	2b	2b	2b	2b
正焦弦長	$2b^2/a$	$2b^2/a$	$2b^2/a$	$2b^2/a$
圖形				

<補充>① 若a=b則稱為等軸雙曲線

② 兩雙曲線的貫軛互為對方之共軛軸則稱兩雙曲線為共軛雙曲線

〔例1〕與平面上兩點(5,0)，(−5,0)距離絕對值差為6的所有點之軌跡方程式為＿＿＿＿＿＿。

解答：$2a=6 \Rightarrow a=3$

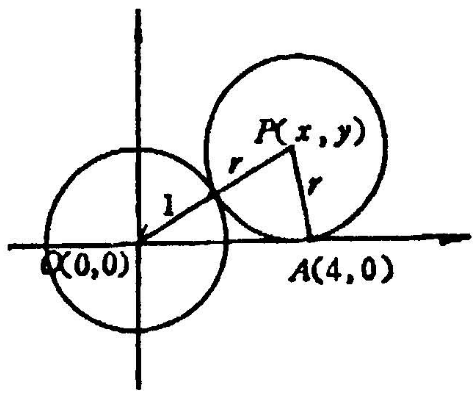
$2c=10 \Rightarrow c=5$

$b=\sqrt{5^2-3^2}=4$

所求 → $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

〔例2〕設一圓過A(4,0)且與$x^2+y^2=1$相切，則此圓之圓心P(x,y)之軌跡方程式為何？

解答：$\begin{cases}\overline{PA}=r\\ \overline{PO}=1+r\end{cases}$ 中心(2,0)



$\overline{PO}-\overline{PA}=1$

$c=2$，$a=\frac{1}{2}$，$b=\sqrt{\frac{16-1}{4}}=\sqrt{\frac{15}{4}}$

所求 ⇒ $\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{15}{4}}=1$

72 雙曲線的參數式與漸近線

1. 參數式：

① $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$，$0\leqq\theta\leqq\pi$（但$\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$）

② $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=a\sec\theta+h \\ y=b\tan\theta+k \end{cases}$，$0\leqq\theta<\pi$（但$\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$）

2. 漸近線：

① $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{漸近線}} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$（即$bx\pm ay=0$）

② $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{漸近線}} \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=0$（即$by\pm ax=0$）

③ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{漸近線}} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=0$

④ $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{漸近線}} \dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=0$

〔例1〕$2xy-8x-5y+1$之水平漸近線為何？

解答：原式 $\Rightarrow 2x(y-4)-5(y-4)+1-20=0$

$(y-4)(2x-5)=19$

漸近線 $(2x-5)(y-4)=0$

$\therefore$ 水平漸近線 $y=4$

〔例2〕雙曲線$y=x-\dfrac{3}{x}$之二漸近線方程式為何？

解答：$x-y-\dfrac{3}{x}=0$

$x^2-xy-3=0$

$x(x-y)=3$

$\therefore$漸近線 $x(x-y)=0$

73 切線方程式

1. 設切(x_0, y_0)在二次曲線上，過此點作曲線的切線 ——
   ① $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$之漸近線

$$\Rightarrow a(x_0 \cdot x)+b\left(\frac{x_0+x}{2}\right)\left(\frac{y_0+y}{2}\right)+c(y_0 \cdot y)+d\left(\frac{x_0+x}{2}\right)+c\left(\frac{x_0+y}{2}\right)+f=0$$

2. 若已知切線斜率為m，則：

① 拋物線 $\begin{cases} y^2=4cx \\ x^2=4cy \end{cases} \xrightarrow{\text{切線}} \begin{cases} y=mx+\dfrac{c}{m} \\ y=mx-cm^2 \end{cases}$

② 橢圓 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{(x-h)^2}{a}+\dfrac{(y-k)^2}{b}=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{切線}} \begin{cases} y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \\ (y-k)=m(x-h)\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \end{cases}$

③ 雙曲線 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{切線}} \begin{cases} y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \\ y=mx\pm\sqrt{-a^2m^2+b^2} \end{cases}$

<補充>求拋物線切線方程式可設切線為$y=mx+k$將之代入二次式，令判別式$=0$，再求k值

〔例1〕若拋物線$y^2=4x$求過點$(1,2)$的切線方程式為何？

解答：設切線方程式為$mx-y=m-2 \Rightarrow x=\dfrac{y+m-2}{m}$代入拋物線

$$y^2=4\times\frac{y+m-2}{m} \Rightarrow y^2-\frac{4}{m}y-\frac{4m-8}{m}=0$$

$$\because\text{相切} \ \therefore \Delta=0 \Rightarrow \frac{4^2}{m^2}+4\times\frac{4m-8}{m}=0 \Rightarrow \frac{16}{m^2}+\frac{16m-32}{m}=0$$

$$\Rightarrow 16+16m^2-32m=0 \Rightarrow m^2-2m+1=0$$

$$\Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1$$

$\therefore$所求$x-y=-1$

〔例2〕若二次曲線$x^2+2y^2+7x+2y-12=0$求過點$(1,1)$的切線方程式

解答：所求 $\Rightarrow x+2y+7\dfrac{x+1}{2}+2\cdot\dfrac{y+1}{2}-12=0$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}x+3y-\frac{15}{2}=0 \Rightarrow 9x+6y-15=0 \quad \Rightarrow 3x+2y-5=0$$