74 因數問題

設 $A\in Z$，$A=P^{\alpha}q^{\beta}S^{\gamma}\cdots\cdots\cdots$，其中P、q、S$\cdots\cdots\cdots$為質數，則：

① A之正因數個數為：$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots\cdots\cdots$

② A之因數個數為：$2(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots\cdots\cdots$

③ A之正因數和為：$(P^0+P^1+\cdots+P^{\alpha})(q^0+q^1+\cdots+q^{\beta})(S^0+S^1+\cdots+S^{\gamma})\cdots$

④ A之一切因數總和為 0

⑤ A之正因數之積為：$(A)^{\left(\frac{\text{正因數個數}}{2}\right)}$

〔例1〕1440的 (A) 正因數36個 (B) 正因數和4914 (C) 因數36個 (D) 正因數之積為$2^{90}\cdot3^{36}\cdot5^{18}$ (E) 正質因數3個

提示：代公式即得

解答：$\because$ $1440=2^5\cdot3^2\cdot5^1$

$\therefore$ (A) 正因數有：$(5+1)(2+1)(1+1)=36$個

(B) 正因數和為：$(2^0+2^1+\cdots\cdots\cdots+2^5)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)=4914$

(D) 正因數之積：$(2^5\cdot3^2\cdot5^1)^{\frac{36}{2}}=2^{90}\cdot3^{36}\cdot5^{18}$

(E) 正質因數為：2，3，5等三個　　Ans：(A)(B)(D)(E)

〔例2〕設$A=\{(x,y)\mid |xy|=3600\quad x,y\in Z\}$ 則$n(A)=$＿＿＿＿＿＿

提示：3600之所有因數即為x或y之解

解答：$\because$ $3600=2^4\cdot3^2\cdot5^2$ 正因數有$(4+1)(2+1)(2+1)=45$個，又x，y有符號變化4種情形　$\therefore$ $n(A)=45\times4=180$個

75　完全相異物的直線排列

1. 公式：① $_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$　② $0!=1$
2. 條件：① n、r∈N 且$n\geq r$　② n個事物必須完全相異
   ③ 取出之r個事物涉及次序關係　④ 取法不允許重複，排列不成封閉

〔例1〕由1，2，3，4，5，6，7，8任取5個相異數字排成一個五位數，必須第一，三，五位為偶數排法為$100P+10q+r$，P、q、r為0到9的整數，則：

(A) P為偶數　(B) q為完全立方數　(C) $q=2P$　(D) $r\in\{2，4，6\}$　(E) $q\in\{1，3，9\}$

提示：排列時，以特殊者先排，較易考慮其情形數

解答：2，4，6，8先排第一，三，五位再從 1，3，5，7 及剩下之一個偶數中選二個排在其餘二格，共

✓		✓		✓

$(4\cdot3\cdot2)\cdot P_2^5=480$種　Ans：(A)(B)(C)

〔例2〕由1，2，3，4，5不重複，依小而大之順序排列時，設第58個為 a ，41352為第b個，則a=＿＿＿＿＿＿　b=＿＿＿＿＿＿

提示：數字依小而大排列，求第n個之問題，用累積個數之方法

解答：(1) ∵ 1□□□□ → 4!=24個　　2□□□□ → 4!=24個

3 1□□□ → 3!=6個　　3 2 1□□ → 2!=2個

3 2 4□□ → 2!=2個　　∴ 第58個為32451=a

(2) 41352之前有 1□□□□，2□□□□，3□□□□

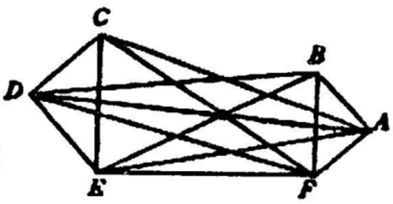
412□□，41325　∴ 41352在第$(4!+4!+4!+2!+1)+1=76$個

〔例3〕有A、B、C、D、E、F等六家，除B與C外，其餘任兩家之間均有直路相通，且無任三家在一直線上，今有一人自A出發，訪問其他五家，又返回A，但每家不得重複訪問，其方法有＿＿＿＿＿＿種。

提示：先將圖形畫出，每一種訪問方式為ABCDEFA之一種排列方式

解答：A之訪問方式有一種為A→B→E→C→F→D→A，

所有訪問方式相當於<A、B、E、C、F、D、A>排成一列 但① A，A必排於兩端　② B，C不得相鄰



故有 $3!\times P_2^4=72$ 種

76 錯置排列的問題研究(直線排列之特殊問題)

1. **錯置排列**：不同物作直線排列，其中數物依次被限制不得佔有某特定位置的排列，稱為錯置排列(或簡稱錯列)
2. **公式**：從n個相異物中全取而作直線排列，若其中有k物如a_1，a_2，‥‥a_k($k\leqq n$)依次被限制不能排在與其足碼相同之位置(如a_i不得排在第i位，$1\leqq i\leqq k$)，其排法

$$N(n,k)=C(k,0)\cdot(n-0)!-C(k,1)(n-1)!+\cdots+(-1)^kC(k,k)\cdot(n-k)!$$

〔例1〕設甲、乙‥‥‥等6人：(A) 甲不排首方法為600 (B) 甲不排首，乙不排次360 (C) 甲乙相鄰但不排首96 (D) 甲排首，乙不排末48 (E) 甲不排首，乙不排次，丙不排末426

提示：① 代錯列公式 ② 相鄰者視為一體，但相鄰者可對調

解答：(A) 一不 ⇒ $1.6!-1.5!=600$ (B) 二不 ⇒ $1.6!-2.5!+1.4!=504$

(C) (甲乙)丙丁戊己，一不 ⇒ $(5!-4!)\times2=192$

(D) 甲固定，且一不 ⇒ $1.5!-1.4!=96$

(E) 三不 ⇒ $1.6!-3.5!+3.4!-1.3!=426$ Ans：<u>(A)(E)</u>

〔例2〕① 四封不同的信，放在四個不同的信封內，全部放錯方法為________種

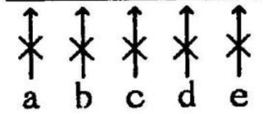
② 有5對夫妻共舞，且每一夫皆不與其妻為舞伴之情形有________種

提示：信放錯信封，及n對夫妻共舞，且每一夫皆不與其妻共舞之問題皆屬錯列問題，代公式可得

解答：① 設a、b、c、d為信，A、B、C、D為相對信封，全部放錯，即a不在A位置，b不在B位置‥‥‥‥等4不

$1\cdot4!-4\cdot3!+6\cdot2!-4\cdot1!+1\cdot0!=9$

② 設夫為A，B，C，D，E 妻為a，b，c，d，e



每一夫皆不與其妻為舞伴，如同A、B、C、D、E等五個位置a不排在A，b不排在B，‥‥e不排在E等5不

$1\cdot5!-5\cdot4!+10\cdot3!-10\cdot2!+5\cdot1!-0!=44$種

77 不完全相異物的直線排列

設n個事物中，有一種P個相同物，另有一種q個相同物，另有一種r個相同物‧‧‧‧‧時，則此n個事物排成一列，稱為不完全相異物的直線排列，其方法數為：

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}\quad(\text{但}p+q+r+\cdots\cdots\cdots\le n)$$

〔例1〕將apopolo一字之諸字母重新排列，則 (A) 任意排列數為__________ (B) 二個p相鄰有__________ (C) 三個o相鄰有__________種 (D) 三個o分開__________ (E) 子音次序不變為__________

提示：(E) 凡相關位置(相對次序)不變者，視為相同物

解答：① $\dfrac{7!}{3!2!}=420$　② (pp)aooo l有$\dfrac{6!}{3!}=120$　③ (ooo)ppa l有$\dfrac{5!}{2!}=60$

④ ppa l先排；再將o插入 $\dfrac{4!}{2!}\times\dfrac{5\times4\times3}{3!}=120$

⑤ 子音pp l視為同物，故$\dfrac{7!}{3!3!}=140$

〔例2〕設00033344排成八位數，其中偶數共k個則 (A) k＞280 (B) k＜300 (C) k為10倍數 (D) k正因數36個 (E) k為完全平方數

提示：首位不得排0 ，個位數字排0或4

解答：

$\boxed{3}\boxed{\qquad\qquad}\boxed{0}$ 或 $\boxed{3}\boxed{\qquad\qquad}\boxed{4}$

$$\frac{6!}{2!2!2!}+\frac{6!}{3!2!}$$

$\boxed{4}\boxed{\qquad\qquad}\boxed{0}$ 或 $\boxed{4}\boxed{\qquad\qquad}\boxed{4}$

$$\frac{6!}{2!3!}+\frac{6!}{3!3!}$$

共230個

Ans：(B)(C)

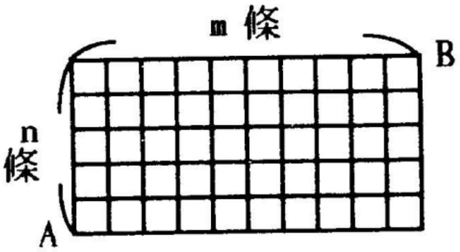
78　捷徑問題

1. 棋盤式道路，有m條縱街，n條橫街

   如圖，則由A取捷徑至B之走法有：

   $$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$$

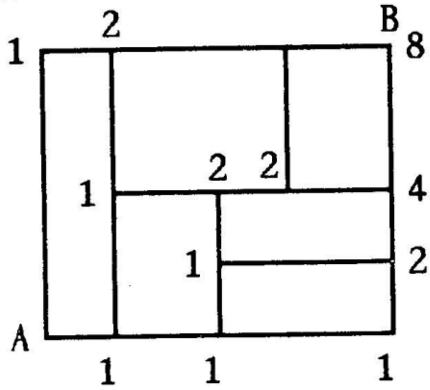
   說明：將n條橫街視為相同物　m條縱街亦視為相同物



2. 有限制的捷徑問題亦可用加法原理，

   乘法原理處理。如圖，交點所寫的數

   原表A至該點之走法數



〔例1〕如圖，自S至N取捷徑之方法

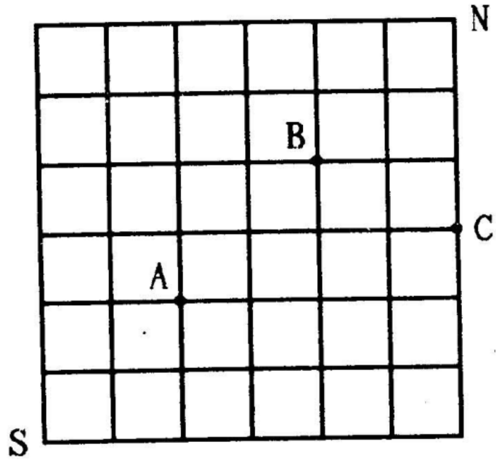
共＿＿＿＿＿＿種

提示：代公式即得

解答：6橫段7縱段

∴ S至N之捷徑走法有

$$\frac{13!}{6!7!}$$



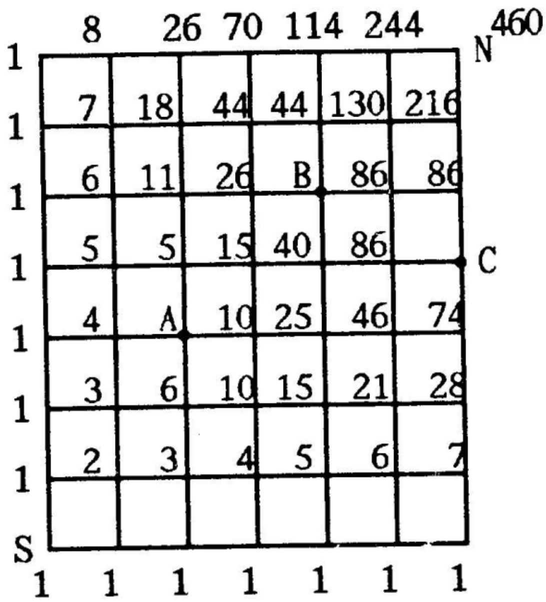
〔例2〕同上題，若上圖中A、B、C三

個路口因施工不能通行，此時

共有＿＿＿＿＿＿走法

提示：利用相加原理

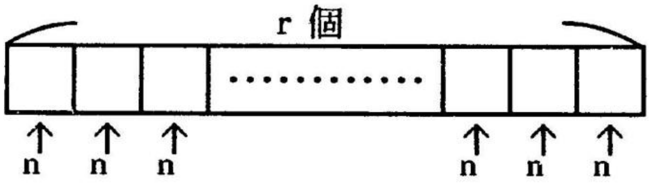
解答：S至N共460種



79 重複排列

自n個相異物中，可重複的，每次取出r個，排成一列稱為重複排列，其排列數為n^r。

$(n \gtreqless r)$



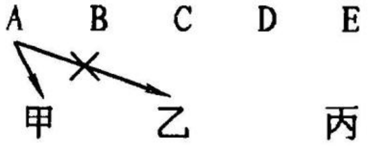
$n \times n \times n \times \cdots\cdots\cdots \times n = n^r$

〔例1〕(1) A、B、C、D、E五種不同物品，分給甲、乙、丙三人，每人可兼得，則共有________種分法

(2) A、B、C、D、E五種不同的酒，注入三個不同形狀的酒杯，每杯只准注入一種，則注酒的方法有________種

提示：重複排列的問題，先分辨何者可重複，再就不可重複者考慮方法數

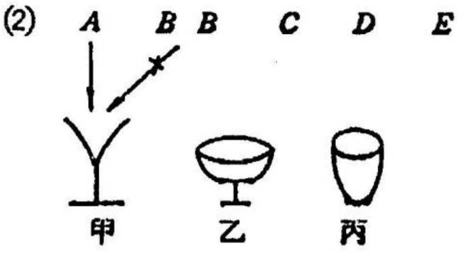
解答：(1) 3 · 3 · 3 · 3 · 3



獎品給甲後就不能再給乙，但甲得A獎品後可再得B獎品，表獎品不可重複給，故對獎品考慮情形數

$3^1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$種

(2)



A酒注入甲杯，B酒不能再注入，但A酒注入甲杯後，可以再注入乙杯，故酒杯不可重複得到，對酒杯考慮情形數

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$種

〔例2〕渡船3隻，每船可載五人，今有下列人數要同時安全渡過，問各有幾法：(1) 4人 (2) 5人 (3) 6人 (4) 7人

提示：(3)(4) 用全部方法扣除不安全之方法

解答：(1) 4人 $\Rightarrow 3^4$ (2) 5人 $\Rightarrow 3^5$ (3) 6人 $\Rightarrow 3^6-3$ (6人同搭一船共3種方法)

(4) 7人 $\Rightarrow 3^7-3-\underline{C_1^7 \cdot P_2^3}$

6人同一條船另一人不同船

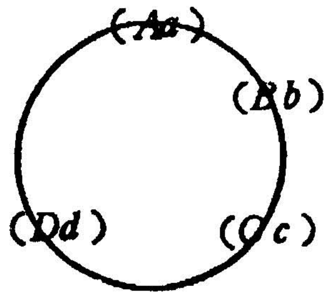
7人同搭一條船

80 環狀排列

1. 由n個相異物中，每次取r個，作一圓形之排列，稱為環狀排列(不因轉動而改變次序關係之排列)
2. n個相異物之環狀排列數為$(n-1)!$
3. n個相異物中取出 r 個之環狀排列數為$\frac{{}_nP_r}{r}$
4. n個相異物之環狀排列中
   ⓐ 左繞與右繞有區別時 ⇒ $(n-1)!$法
   ⓑ 左繞與右繞無區別時 ⇒ $\frac{1}{2}(n-1)!$法

〔例1〕4對夫婦圍圓桌而坐，則 (A) 任意有7!種 (B) 同性相鄰$2\cdot(4!)^2$ (C) 夫婦相鄰96 (D) 男女相間$3!\cdot4!$ (E) 男女相間且夫婦相鄰24

提示：代公式即得



解答：(A) 任意排 ⇒ 7!

(B) (4男)(4女) ⇒ $1!\cdot4!\cdot4!=(4!)^2$

(C) (Aa)(Bb)(Cc)(Dd) ⇒ $3!\cdot(2!)^4=96$

(D) 4男先圍圓桌，4女插女 ⇒ $3!\cdot4!$

(E) 將夫婦視為一體作圓桌排列，但夫婦可對調位置，其餘順調

∴ $(3!)\cdot2=12$種

〔例2〕正立方體一個，欲於其六面分別刻上1，2，3，4，5，6等六個數字，有______種刻法

提示：上、下、左、右、前、後皆對稱 ⇒ 先固定其中一面

解答：$[6\cdot5\cdot(4-1)!]\div6=30$種

※ 視各面為不同，其實相同 ⇒ 再除以相同數

81　方桌排列、進門問題

1. 方桌排列：自n人中選出r人圍一正k邊形桌而坐，每邊坐m人（$mk=r$），其方法有

$$\frac{P_r^n}{r}\times m \text{ 種}$$

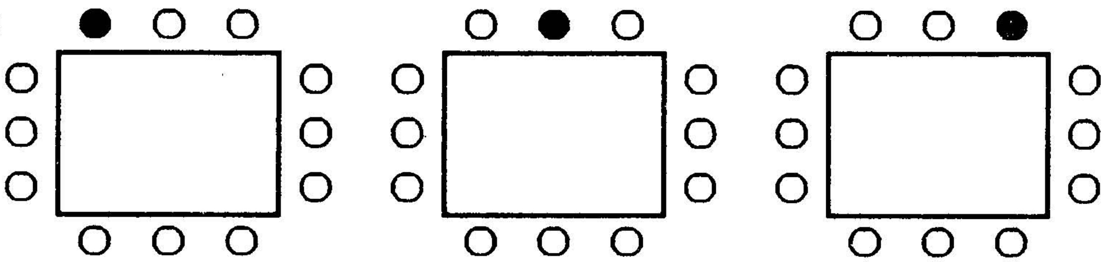
※ 若每邊人數不等時，且任意坐，每轉一圈，看幾種情形，而視為一種處理

2. 設n個不同的門甲、乙，從不同的門各進出一次，個人亦不得同一門進出，有 $n(n-1)(n^2-3n+3)$ 種方法

〔例1〕(a) 12人圍坐一正方形桌，每邊坐3人有＿＿＿＿＿＿法　(b) 20人中任選18人圍坐一正六邊形桌，每邊坐3人有＿＿＿＿＿＿法

提示：注意，全取或取出部分人數不同

解答：(a)



$\Rightarrow (12-1)!\times 3$種

※ 視轉動為相同，其實不同 ⇒ 再乘以相異數

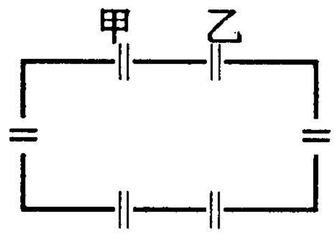
(b) 代公式 $\Rightarrow \dfrac{P_{18}^{20}}{18}\times 3$種

〔例2〕設6個不同的門甲、乙從不同的門各進出一次，個人亦不得同一門進出，有＿＿＿＿＿＿種方法

提示：代公式即得

解答：

$$\underbrace{(6)(5)}_{\text{進門的方法數}}\ \underbrace{[6^2-3\cdot 6+3]}_{\text{出門的方法數}}=630\text{種}$$



82　一般組合

自n個相異物中，每次不可重複的取出r個為一組($r\leq n$)，同一組內的事物若不計其前後順序，就叫做n中取r的組合。其中每一組，稱為一組合，所有組合的總數稱為組合數，記為${}_nC_r$〔或C_r^n，$C(n，r)$〕

1. 公式：① ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$　　② ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

　　③ $C_n^n=C_0^n=0!=1$　　④ 巴斯卡定理：${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

2. 條件：① $n\in N$，$r\in N\cup\{0\}$ 且$n\geq r$　　② n個事物必須完全相異

　　③ 選取時不得重複，取出後不作排列

〔例1〕一列火車從第一車到第十車共十節車廂。要指定其中三節車廂准許吸烟，則共有__________種指定方法。若更要求此三節准許吸烟的車廂兩兩不相銜接，則共有__________種指定方法。

提示：(2) 利用插入法

解答：(1) ${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$

(2) 若要求三節准許吸烟車廂兩兩不相接，可設想在七節車廂中有8個間隔(包含前後兩空位)人任取3個間隔(安插三節准許吸烟的車廂)，故有${}_8C_3=56$種。

〔例2〕試利用${}_nC_r$為整數的性質，證明連續的r個自然數(或整數)的連乘積必可為r!整除

提示：${}_nP_r$　，　${}_nC_r$皆為自然數

解答：設連續的r個正整數為n，(n+1)，(n+2)，………，(n+r−1)

$$\because\ \frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}$$

$$=\frac{[1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(n-1)]\cdot n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{[1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(n-1)]\cdot r!}=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

$$=C_r^{n+r-1}\in N$$

$\therefore$ n(n+1)(n+2)………(n+r−1)可為r!整除，故得證

83 巴斯卡定理

1. 巴斯想法：從n件相異物中任取r個之方法，可分為其中某件物品必取及必不取兩種情形，分別計算其方法數之後相加

2. 定理：$C_r^n=C_{r-1}^{n-1}+C_r^{n-1}$

3. 推論：$C_r^n=C_r^{n-1}+C_{r-1}^{n-2}+C_{r-2}^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+1$

〔例1〕(a) 試證$C_r^n=C_r^{n-1}+C_{r-1}^{n-2}+C_{r-2}^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+1$

(b) 若$C_0^1+C_1^2+C_3^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+C_{n-1}^n=190$ 則n=？

提示：利用巴斯卡定理證明之

解答：(a) $C_r^n=\underline{C_{r-1}^{n-1}}+C_r^{n-1}=C_r^{n-1}+\underline{C_{r-1}^{n-2}+C_{r-2}^{n-2}}=C_r^{n-1}+C_{r-1}^{n-2}+C_{r-2}^{n-3}+C_{r-3}^{n-3}=\cdots\cdots$

$=C_r^{n-1}+C_{r-1}^{n-2}+C_{r-2}^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+C_0^{n-r}=C_r^{n-1}+C_{r-1}^{n-2}+C_{r-2}^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+1$

(b) 左$=C_{n-1}^{n+1}=C_2^{n+1}=\dfrac{(n+1)(n)}{2!}=190$

$(n+20)(n-19)=0$ 但$n\in N$ $\therefore$ $n=19$

〔例2〕設箱中有31個同質同大的球，其中有紅球5個，白球26個，今自箱中每次取一球，球不放回，直到紅球取完為止，問取法共____________種

提示：利用巴斯定理之推論

解答：設取出最後一個紅球之前，已經取了4個紅球，k個白球(0≦k≦26)而4個紅球k個白球的排列數為$\dfrac{(k+4)!}{4!k!}=C_4^{k+4}$ 故方法數為：

$$\sum_{k=0}^{26}C_4^{k+4}=C_4^4+C_4^5+C_4^6+C_4^7+\cdots\cdots\cdots+C_4^{29}+C_4^{30}$$

$$=[C_5^5+C_4^5]+C_4^6+C_4^7+\cdots\cdots\cdots+C_4^{29}+C_4^{30}$$

$$=C_5^6+C_4^6+C_4^7+\cdots\cdots\cdots+C_4^{29}+C_4^{30}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=C_5^{31}$$

84 幾何組合

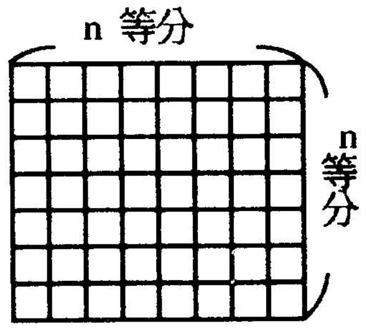
1. 平面上n個點，其中r點共線則

① 可作直線${}_nC_2-{}_rC_2+1$條　　② 三角形${}_nC_3-{}_rC_3$個

③ 四邊形${}_nC_4-{}_rC_4-{}_rC_3\cdot{}_{n-r}C_1$個

2. 一正方形之每一邊n等分做成一正方形的網路

(如圖)則：



① 共有n類不同的正方形

② 共有$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$類不同的矩形

③ 共有$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$個正方形

④ 共有$[C(n+1,2)]^2$個矩形

〔例1〕平面上12點，其中6點共線，則 (A) 直線＿＿＿＿＿條 (B) 三角形＿＿＿＿＿個 (C) 四邊形＿＿＿＿＿個

提示：注意共線者應扣除

解答：(A) 線：${}_{12}C_2-{}_6C_2+1=52$　　(B) 三角形：${}_{12}C_3-{}_6C_3=200$

(C) 四邊形：${}_{12}C_4-{}_6C_4-{}_6C_3\cdot{}_6C_1=360$

〔例2〕如圖等間隔，等距離18點可作直線幾條：(A) 77 (B) 88 (C) 97 (D) 105 (E) 皆非

×××
×××××
×××××
×××××

提示：注意共線情形很多，3點共線就有12組

解答：5點共線3組，4點共線5組，3點共線12組

∴ 可作直線${}_{18}C_2-3\cdot{}_5C_2-5\cdot{}_4C_2-12\cdot{}_3C_2+20=77$

85 不盡相異物的組合數與排列數

1. 不完全相異物之部分取法的組合數與排列數須討論
   ① 先將情形數分類 ⇒ 分幾同幾異
   ② 再按分類求組合數及排列數
2. 分組組合(注意事項見例2說明)

〔例1〕自mathematical中之字母中任取4個組合數共__________種，又其排列數有__________種

提示：按n同n異分類討論

解答：mathematical其字母整理為aaa，mm，tt，h，e，i，c，l

分　類	組　合　數	排　列　數
① 三同一異	$C_1^1 \cdot C_1^7=7$ (○○○×)	$7\times\frac{4!}{3!}=28$
② 二同二同	$C_2^3=3$ (○○××)	$3\times\frac{4!}{2!2!}=18$
③ 二同二異	$C_1^3 \cdot C_2^7=63$ (○○×△)	$63\times\frac{4!}{2!}=756$
④ 四異	$C_4^8=70$ (○×△✓)	$70\times4!=1680$

∴ 組合數$=7+3+63+70=143$　排列數$=28+18+756+1680=2482$

〔例2〕將 a、b、c、d、e、f 6人分為三組如下：

(a) 一組一人，一組二人，一組三人，有__________法 (b) 甲組一人，乙組二人，丙組三人，有__________法 (c) 等分為三組有__________法，等分為甲、乙、丙三組有__________法

提示：① 注意各組有無區別　② 各組無區別時要注意等分的組數

解答：(a) $C_1^6\times C_2^5\times C_3^3=60$ (各組無區別 ⇒ 分組)

(b) $C_1^6\times C_2^5\times C_3^3=60$ (各組有區別 ⇒ 分人)

(c) 等分為三組 ⇒ $C_2^6\times C_2^4\times C_2^2\times\frac{1}{3!}$ (各組無區別時要除以3!)

等分為甲、乙、丙三組 ⇒ $C_2^6\times C_2^4\times C_2^2$ (各組有區別時不必除)

86　重複組合

1. **定義**：由n個相異物中，可重複的取出r個($n \gtreqless r$)出來的方式稱為n中取r的重複組合，其方法數記為${}_nH_r$或${}_nS_r$

2. **公式**：${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

3. **分配問題**：① 不同物品分配至不同物中(重複排列)

   ② 相同物品分配至不同物中(重複組合)

   ③ 相同物品分配至相同物中(分組)

   ④ 不同物品分配至相同物中(分組再討論情形數)

〔例1〕由x、y、z、u四文字：(A) 作三次項有__________項　(B) 四次項有__________項　(C) 五次項有__________項　(D) n次項有__________項

提示：文字可重複取，且與次序無關(如xy與yx相同)為重複組合

解答：(A) 三次項如x^3，y^3，z^3，u^3·······等即從 x、y、z、u 文字中可重複的任取3個　∴ 有${}_4S_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$項

(B) ${}_4S_4 = {}_7C_4 = 35$ 項　(C) ${}_4S_5 = {}_8C_5 = 56$

(D) ${}_4S_n = {}_{n+3}C_n = \dfrac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)$

〔例2〕① 5個不同的球，任意分配到3個不同的箱子有__________法

② 5個相同的球，任意分配到3個不同的箱子有__________法

③ 5個相同的球，任意分配到3個相同的箱子有__________法

④ 5個不同的球，任意分配到3個相同的箱子有__________法

提示：將情形分類清楚即可(同上列整理)

解答：① 不同 → 不同 (重複排列) ⇒ 3^5

② 相同 → 不同 (重複組合) ⇒ H_5^3

③ 相同 → 相同 (分組) ⇒ (5，0，0)(4，1，1)(3，2，0)(3，1，1)(2，2，1) 共5種

④ 不同 → 相同 (就③之分組再計算情形數) ⇒

$$C_5^5 + C_4^5 \cdot C_1^1 + C_3^5 \cdot C_2^2 + \frac{1}{2!}C_3^5C_1^2C_1^1 + \frac{1}{2!}C_2^5C_1^3C_1^1 = 41$$

87　整數解問題

1. 方程式$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=r\,(n\leq r)$的正整數解有${}_nS_{r-n}$組 $\Longleftrightarrow$ r件相同的物品分給n人，每人至少一件的方法數為${}_nS_{r-n}$
2. 方程式$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=r$的非負整數解有${}_nS_r$ $\Longleftrightarrow$ r件相同的物品分給n個人，每人可兼得的方法數為${}_nS_r$
3. 若 $x+3y+7z=k$時因係數不均為1，故須分類計數，不能代公式

〔例1〕$x+y+z=13$ 則：(A) 非負整數解__________組 (B) 正整數解__________組

(C) 均大於1之整數解__________組 (D) 正奇數解__________組

提示：(D) 正奇數解須作變數變換

解答：(A) 即x、y、z三類中可重複的任取13個　∴ 非負整數解有${}_3S_{13}=105$組

(B) $x、y、z\in N$ 即$x\geq1$，$y\geq1$，$z\geq1$

$(x-1)+(y-1)+(z-1)=10 \Rightarrow$ 正整數解${}_3S_{10}=66$組

(C) $x\geq2$，$y\geq2$，$z\geq2$ $\Rightarrow$ $(x-2)+(y-2)+(z-2)=7$

∴ 均大於1之整數解共${}_3S_7=36$組

(D) ∵ x、y、z為正奇數　∴ 令$x=2k_1+1$，$y=2k_2+1$，$z=2k_3+1$

(k_1，k_2，k_3為非負整數) $\Rightarrow (2k_1+1)+(2k_2+1)+(2k_3+1)=13$

$k_1+k_2+k_3=5$ 有${}_3S_5=21$組

〔例2〕設x、y、x、u∈N　則$x+y+z+u^2=21$　有__________組解

提示：固定u^2討論之

解答：
$$\left.\begin{array}{ll}
u=1\text{時} & x+y+z=20 \Rightarrow H^3_{17}\\
u=2\text{時} & x+y+z=17 \Rightarrow H^3_{14}\\
u=3\text{時} & x+y+z=12 \Rightarrow H^3_{9}\\
u=4\text{時} & x+y+z=5 \Rightarrow H^3_{2}
\end{array}\right\}\text{共}H^3_{17}+H^3_{14}+H^3_{9}+H^3_{2}=352\text{組}$$

87 整數解問題

1. 方程式$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=r\,(n\leqq r)$的正整數解有${}_nS_{r-n}$組 $\Longleftrightarrow$ r件相同的物品分給n人，每人至少一件的方法數為${}_nS_{r-n}$
2. 方程式$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=r$的非負整數解有${}_nS_r$ $\Longleftrightarrow$ r件相同的物品分給n個人，每人可兼得的方法數為${}_nS_r$
3. 若 $x+3y+7z=k$時因係數不均為1 ，故須分類計數，不能代公式

〔例1〕$x+y+z=13$ 則：(A) 非負整數解__________組 (B) 正整數解__________組

(C) 均大於1之整數解__________組 (D) 正奇數解__________組

提示：(D) 正奇數解須作變數變換

解答：(A) 即x、y、z三類中可重複的任取13個 $\therefore$ 非負整數解有${}_3S_{13}=105$組

(B) $x、y、z\in N$ 即$x\geqq1$，$y\geqq1$，$z\geqq1$

$(x-1)+(y-1)+(z-1)=10 \Rightarrow$ 正整數解${}_3S_{10}=66$組

(C) $x\geqq2$，$y\geqq2$，$z\geqq2$ $\Rightarrow$ $(x-2)+(y-2)+(z-2)=7$

$\therefore$ 均大於1之整數解共${}_3S_7=36$組

(D) $\because$ x、y、z為正奇數 $\therefore$ 令$x=2k_1+1$，$y=2k_2+1$，$z=2k_3+1$

(k_1，k_2，k_3為非負整數) $\Rightarrow (2k_1+1)+(2k_2+1)+(2k_3+1)=13$

$k_1+k_2+k_3=5$ 有${}_3S_5=21$組

〔例2〕設$x、y、x、u\in N$ 則$x+y+z+u^2=21$ 有__________組解

提示：固定u^2討論之

解答：

$$\left.\begin{array}{lll} u=1\text{時} & x+y+z=20 & \Rightarrow H^3_{17} \\ u=2\text{時} & x+y+z=17 & \Rightarrow H^3_{14} \\ u=3\text{時} & x+y+z=12 & \Rightarrow H^3_{9} \\ u=4\text{時} & x+y+z=5 & \Rightarrow H^3_{2} \end{array}\right\}\text{共}H^3_{17}+H^3_{14}+H^3_9+H^3_2=352\text{組}$$

88 組合總數

1. 自p個a，q個b，r個c中取出部分或全部之組合總數為 $(p+1)(q+1)(r+1)-1$
   ⇒（取捨問題）
2. 付款問題：(a) 諸單位皆不連續者 ⇒ 一般組合總數問題
   (b) 諸單位數連續者 ⇒ 大鈔兌成小鈔
   (c) 部分單位連續者 ⇒ 連續部分之大鈔兌成小鈔

〔例1〕(a) 設$S=\{1,2,3,4,5\}$，則S共有__________個部分集合。

(b) 設$n(T)=k$，則T共有__________個部分集合。

提示：取捨問題

解答：(a) $S=\{1,2,3,4,5\}$

↑↑↑↑↑

取或不取

$2\times2\times2\times2\times2=2^5$

(b) 由(a)知$n(T)=k$時T的部分集合有2^k個

〔例2〕一元4張，5元4張，10元2張則有__________種不同的付款方法，又可付出__________種不同的款項。

提示：注意比較兩者之差別，如付出10元為一種款項，但有5元兩張及10元一張等二種不同的付款方法。

解答：(1) 共有$(4+1)(4+1)(2+1)-1=74$付款方法

$\uparrow$ 全部都沒有付出

(2) 相當於有$\begin{cases}\text{一元—4張}\\ \text{五元—8張}\end{cases}$

故可付出$(4+1)(8+1)-1=44$種不同的款項

89　函數個數問題

A，B為二個非空集合，$n(A)=m$，$n(B)=n$由A映至B之函數

① 映至函數有n^m個

② 一對一函數有${}_nP_m(n\geq m)$個

③ 映成函數有$n^m-{}_nC_1(n-1)^m+{}_nC_2(n-2)^m+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n(n-n)^n$個 $(m\geq n)$

④ 一對一且映成函數有$n!$個$(n=m)$

P.S.：映成函數係數相當於巴斯卡三角形展開，但正負相間

〔例1〕設$n(A)=7$，$n(B)=7$則(A)A映至B函數有＿＿＿＿＿＿個　(B)A一對一B函數為＿＿＿＿＿＿個　(C)A映成B函數＿＿＿＿＿＿個　(D)A一對一且映成B函數＿＿＿＿＿＿個。

提示：代公式即得

解答：(A) $f:A\to B \Rightarrow 7^7$個

(B) $f:A\to B$，$\forall x,y\in A$若$x\neq y$則$f(x)\neq f(y) \Rightarrow 7!$

(C) 映成函數 $\Rightarrow 7!$

(D) 一對一且映成 $\Rightarrow 7!$

〔例2〕設$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3\}$則(A) A映成B函數有＿＿＿＿＿＿個　(B) 滿足$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=9$的函數有＿＿＿＿＿＿個。

提示：(B) 討論情形數

解答：(A) A映成B $\Rightarrow 1\cdot 3^4-3\cdot 2^4+3\cdot 1^4-1\cdot 0^4=35$個

(B) 和為9之情形 $\Rightarrow (3,3,2,1) \to \dfrac{4!}{2!}=12$

$(3,2,2,2) \to \dfrac{4!}{3!}=4$

共 $12+4=16$個

90 二項式定理

1. 基本公式：$n\in N$

$$(a+b)^n=C^n_0a^n+C^n_1a^{n-1}b+C^n_2a^{n-2}b^2+\cdots+C^n_ra^{n-r}b^r+\cdots+C^n_{n-1}ab^{n-1}+C^n_nb^n$$

$$=\sum_{r=0}^{n}C^n_ra^{n-r}b^r \text{<共n+1項>}$$

※展式中的一般項，即第$r+1$項為$T_{r+1}=C^n_ra^{n-r}b^r$

2. 變形公式：$n\in N$

$$(1+x)^n=C^n_0+C^n_1x+C^n_2x^2+\cdots+C^n_rx^r+\cdots+C^n_{n-1}x^{n-1}+C^n_nx^n$$

$$=\sum_{r=0}^{n}C^n_rx^r \text{<共n+1項>}$$

※展式中的一般項，即第$r+1$項為$T_{r+1}=C^n_rx^r$

P.S：令$x=1$則得$C^n_0+C^n_1+\cdots+C^n_{n-1}+C^n_n=2^n$(組合總數)

〔例1〕將$(2x^3-\dfrac{1}{x})^{18}$展開後，x^{30}係數為__________。

提示：利用二項式定理展開

解答：設第$r+1$項為x^{30}項

則${}_{18}C_r(2x^3)^{18-r}\cdot(-\dfrac{1}{x})^r={}_{18}C_r\cdot2^{18-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{54-4x}$

令 $54-4r=30\Rightarrow r=6$

$\therefore$ x^{30}項為第7項且係數為${}_{18}C_6\cdot2^{18-6}\cdot(-1)^6=2^{12}\cdot{}_{18}C_6$

〔例2〕$(1-x-x^2)^{103}=a+bx+cx^2+\cdots\cdots+dx^{206}$則$a,b,c,d$各多少？

提示：將$(1-x)$視為一項，再用二項式定理

解答：$\because(1-x-x^2)^{103}=[(1-x)-x^2]^{103}$

$$={}_{103}C_0(1-x)^{103}+{}_{103}C_1(1-x)^{102}\cdot(-x^2)^1+\cdots\cdots+{}_{103}C_{103}(-x^2)^{103}$$

$$=(1-x)^{103}-103(1-x)^{102}x^2+\cdots-x^{206}$$

$\therefore$ x^0：$a=1$ $\qquad$ x^1：$b=-{}_{103}C_1=-103$

x^2：$c={}_{103}C_2-103=5150$ $\qquad$ x^{306}：$d=-1$

91 機率的定義與性質

1. 樣本空間(s)：某項試驗之一切可能發生的結果所成的集合稱為此試驗之樣本空間。常以S表示
2. 事件(H)：樣本空間之每一部分集合，稱為此樣空間之一事件，即$H \subset S$。
3. 機率的定義：設S為某試驗的樣空間，H為一事件($H \subset S$)則事件H發生的機率為

$$P(H)=\frac{n(H)}{n(S)}$$

4. 機率的基本性質：設樣本空間S,$H \subset S$，$P(H)=\frac{n(H)}{n(S)}$則

① $0 \leqq P(H) \leqq 1$

② 失敗機率$q=1-p$　$0 \leqq q \leqq 1$(失敗機率＋成功機率＝1)

〔例1〕擲三公正骰子，則點數和為8點機率＝＿＿＿＿＿＿。

提示：先考慮8點有那些情形，再加以排列

解答：(1,1,6) → 3種　　(2,2,4) → 3種

(1,2,5) → 6種　　(2,3,3) → 3種

(1,3,4) → 6種　　∴ 共有3+3+3+6+6=21種

$$P=\frac{n(H)}{n(S)}=\frac{21}{6^3}=\frac{21}{216}$$

※ 三骰子點數和之情形數如下表

點數和	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
情形數	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

〔例2〕由1,2,3,‧‧‧‧‧10等自然數中，任取一數k，使二次方程式$x^2+2(k-3)x+(3k+1)=0$有虛根的機率為＿＿＿＿＿＿。

提示：方程式有虛根 ⇒ 判別式<0

解答：$n(S)=C_1^{10}=10$

H：$x^2+2(k-3)x+(3k+1)=0$有虛根

$\therefore D=(k-3)^2-(3k+1)<0 \Rightarrow 1<k<8$

$\therefore k=2,3,4,5,6,7 \Rightarrow n(H)=6$

$\therefore P(H)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

92　互斥事件、相依事件

Ⅰ① 若$E_1, E_2 \cdots E_n$等事件中，任二事件都不可能同時發生，則稱這些事件為互斥事件

② 設$E_1 E_2 \cdots E_3$為互斥事件，則$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots\cdots+P(E_n)$

③ 對事件A而言，A事件不發生之事件稱為A的餘事件，以A'或$\bar{A}$表之

$\because P(A)+P(A')=1 \Rightarrow P(A')=1-P(A)$

Ⅱ① 事件B發生之機率隨事件A之發生與否，而有所不同時，稱事件B為事件A的相依事件

② 事件A、B任一發生的事件，稱為A、B之和事件，以$A \cup B$表之

③ 事件A、B同時發生的事件，稱為A、B之積事件，以$A \cap B$表之

④ A、B為相依事件，則$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(\frac{B}{A})$

〔例1〕甲乙二人各任寫一個位數，設寫任一二位數機會均等，(a)甲所寫之二位數大於乙所寫之二位數的機率為___________，(b)甲所寫之各位數字均大於乙所寫的同位數字的機率為___________。

提示：甲勝乙(或乙勝甲)＝甲、乙比大小＝〔1－(同大的機率)〕$\times\frac{1}{2}$

解答：(a) $P(H_1)=[1-\frac{90}{90\times 90}]\times\frac{1}{2}$

(b) $P(H_2)=(1-\frac{9}{9\times 9})\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{10}{10\times 10})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

〔例2〕5根籤中有一根中獎A,B,C,D,E5人依次抽1根，抽出不再放回，抽籤前，求出各人抽中之機率。

提示：抽籤或摸球取後不放回 ⇒ 相依事件

取後放回 ⇒ 獨立事件

解答：$P(A)=\frac{C_1^1}{C_1^5}=\frac{1}{5}$　$P(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$　$P(C)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

同理　$P(D)=P(E)=\frac{1}{5}$

93 獨立事件，屢次重複(獨立)試驗

1. 若$E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots, E_n$等事件中，任何事件發生之機率都不受其他事件之發生與否的影響時，稱此n個事件為獨立事件。
2. 設$E_1, E_2, E_3 \cdots\cdots\cdots E_n$為n個獨立事件，則
   $P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots\cdots \cap E_n) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdots\cdots p(E_n)$
3. 事件E在單獨一次試驗中，成功的機率為p，失敗的機率為q$(p+q=1)$則E事件在連續的n次獨立試驗中
   ① 恰有r次成功的機率為$C^n_r p^r \cdot q^{n-r}$
   ② 至少有r次成功的機率為$\sum\limits_{k=r}^{n} C^n_k p^k q^{n-k}$或$1-\sum\limits_{k=0}^{r-1} C^n_k p^k q^{n-k}$

〔例1〕有一射手平均5發可命中3發則n發皆不命中的機率為__________，又若該射手最少要命中1發的機率大於0.999時，至少要射__________發。

提示：(1) P(不命中)＝1－P(命中)　(2) 未知數在指數的時候要取對數

解答：(1) $P(\text{命中})=\frac{3}{5}$　$P(\text{不命中})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

∴ 連射n發皆不中之機率為$(\frac{2}{5})^n$

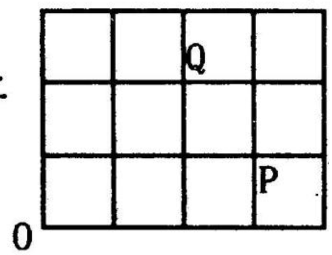
(2) $1-(\frac{2}{5})^n>0.999 \Rightarrow (\frac{2}{5})^n<10^{-3}$ 取對數

$n(\log 2-\log 5)<-3 \Rightarrow n>7.5$ 但 $n\in N$

故最小n值為8

〔例2〕右圖中自0出發依下述規則1格1格進行投擲骰子(a)出現一點或6點向右，(b)一或6點以外者向上求⑴到達P之機率，⑵到達Q之機率。

提示：擲骰子的走路問題 ⇒ 先決定骰子應連續擲幾次



解答：(a) 欲到P點骰子應連擲4次且4次中恰有3次向右一次向上

$P(P)=C^4_3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})=\frac{8}{81}$

(b) $P(Q)=C^4_2(\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{24}{81}$

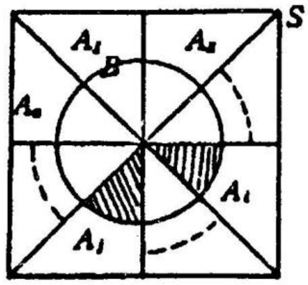
94 條件機率、貝氏定理

1. **條件機率**：設S為某試驗的樣本空間，A, B⊂S即A, B為兩事件令N(A)表A事件在隨機試驗中，出現的次數，N(A∩B)表A, B兩事件同時出現的次數，則在已知A事件發生的情形下，B事件也發生的機率

定義為$P(\frac{B}{A})=\frac{N(A\cap B)}{N(A)}$ 或 $P(\frac{B}{A})=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

2. **貝氏定理**：設$A_1 A_2 \cdots A_i, \cdots A_j, \cdots A_n$為樣本空間S的一個分割而B為任一事件(B⊂S)則

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B/A_j)}$$



〔例1〕一個骰子擲3次，令A表第一次出現偶數的事件，B表三次中至少二至出現偶數的事件，試求P(B/A)及P(A/B)

提示：條件機率代公式即得

解答：$P(A)=\frac{1}{2}$ $P(B)=C_2^3(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}[C_1^2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2]=\frac{3}{8}$

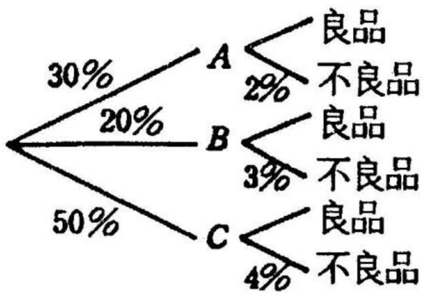
(a) $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4}$

(b) $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4}$

〔例2〕設一工廠有三部機器A, B, C分別生產全部產品的30%，20%，50%且生產不良品2%，3%，4%任取一不良品為B機器生產之機率＝＿＿＿＿＿。

提示：貝氏定理代公式即得(亦可用樹形圖)

解答：



$$P=\frac{20\%\times 3\%}{30\%\times 2\%+20\%\times 3\%+50\%\times 4\%}=\frac{3}{16}$$

95　幾何機率

1. 若樣本空間S對應某種幾何圖形則其中一事件A的幾何機率為A之幾何度量對S的幾何度量之比即$P(A)=\dfrac{m(A)}{m(S)}$
2. 幾何度量是指角度、長度、面積、體積等等
3. 幾何機率即總情形為無限多種時，利用幾何度量求得
4. A度量必在全度量S內之部分度量才可
5. $a\leqq x<b$與$a\leqq x\leqq 6$則x長度度量均為$b-a$
6. 一變數用長度，二變數用平面坐標求面積比率，三變數為空間體積比。

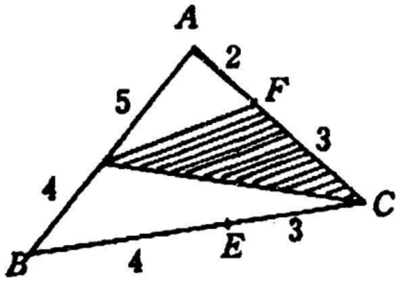
〔例1〕於△ABC的三邊上分別取D,E,F三點，使A−D−B，B−E−C，C−F−A且$\overline{AD}:\overline{DB}=5:4$，$\overline{BE}:\overline{EC}=4:3$，$\overline{CF}:\overline{FA}=3:2$則於△ABC內部任取一點P，而P落在△DCF內部的機率為__________。

提示：求出面積比

解答：$\dfrac{a\triangle ADF}{a\triangle ABC}=\dfrac{5\times 2}{9\times 5}=\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{a\triangle BCD}{a\triangle ABC}=\dfrac{4\times 7}{9\times 5}=\dfrac{4}{9}$

故$P(H)=1-\dfrac{2}{9}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{3}$



〔例2〕設$S=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 6，0\leqq y\leqq 4\}$，$T=\{(x,y)\mid y\geqq |x-2|，x-3y+6\geqq 0\}$於S中任取一點P，則$P\in T$的機率為__________。

提示：先分別將S,T之圖形作出，再求其比率

解答：$S:y\geqq |x-2|$

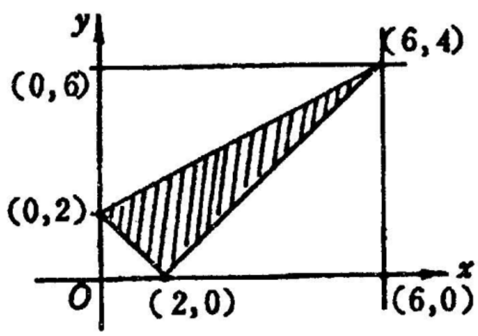
①$x\geqq 2$時 $\Rightarrow x-y-2\leqq 0$

②$x\leqq 2$時 $\Rightarrow x+y-2\geqq 0$

$n(s)=6\times 4=24$

$n(H)=\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc}0&2&6&0\\2&0&4&2\end{array}\right|=8$

$\therefore P(H)=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$



96 數學期望值

1. 設某事件成功的機率為P，若該事件成功，即可得到m個單位物的報酬則稱m・p(單位)為此事件的數學期望值，簡稱為期望值。
2. 設一試驗的樣本空間為S，$\{A_1,A_2,A_3,\cdots A_k\}$為樣本空間S的一個分割，且設事件$A_i$發生的機率為$P_i$，$(i=1,2,3,\cdots k)$若事件$A_i$發生，即可得$m_i$個單位物的報酬則稱$m_1\cdot P_1+m_2\cdot P_2+m_3\cdot P_3+\cdots+m_k\cdot P_k=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot P_i$為此試驗的數學期望值，簡稱期望值。

※① 期望值即做任何事之平均代價

② 若一件事有許多不同可能情形時，期望值為諸期望值的和

〔例1〕袋中有1號卡片1支，2號4支，…n號n^2支，今任意抽出一支，若為r號可得r元，則抽出一支的期望值為__________。

提示：代公式即得

解答：袋中共計卡片　$1+4+9+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$元

任一支期望值為 $\dfrac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$元

〔例2〕擲一骰子，當點數X(X=1,2,3,4,5,6)出現時$\log_{10}(x^3+3)$之整數部分記為Y，並以μ表示Y之期望值，則μ值為何？

提示：列表計算較方便

解答：

X	1	2	3	4	5	6
$\log(X^3+3)$	log4	log11	log30	log67	log128	log219
Y	0	1	1	1	2	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E=\mu=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot(1+1+1)+\frac{1}{6}(2+2)=\frac{7}{6}$$

97 算術平均數

1. 未分組資料

變量x	$x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots x_n$	總計
次　數	$1, 1, \cdots\cdots\cdots, 1$	n

n個數值分別為$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$則算術平均數為$M=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

2. 已分組資料

變量x	$x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots x_k$	總計
次　數	$f_1, f_2, \cdots\cdots\cdots, f_k$	n

算術平均數$M=\dfrac{1}{n}(f_1x_1+f_2x_2+\cdots\cdots+f_kx_k)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_ix_i$

〔例1〕某生月考績如右表所示：求其平均成績

科目	上課時數	成績
國文	6	80
英文	4	78
數學	4	65
物理	4	82
化學	4	76

提示：代公式即得

解答：$W=\dfrac{6\times80+4\times78+4\times65+4\times82+4\times76}{6+4+4+4+4}$

$\fallingdotseq 76.5$(分)

〔例2〕某班學生50人體重統計如右圖所示，求其平均體重

體　重	人數	組中點
40～ 50	3	45
50～ 60	5	55
60～ 70	15	65
70～ 80	18	75
80～ 90	7	85
90～100	2	95

提示：已分組 ⇒ 求組中點再代公式

解答：平均體重＝

$$\frac{3\times45+5\times55+15\times65+18\times75+7\times85+2\times95}{50}$$

$=70.4$(公斤)

98　中位數

1. 未分組：將n個數值$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$按大小順序排列如下

$$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \cdots\cdots \leqq x_{(n)}\text{若}n=2k+1\text{時}Me=x_{k+1}=x_{(\frac{n+1}{2})}$$

$$\text{若}n=2k\text{時}Me=\frac{1}{2}[x_{(k)}+x_{(k+1)}]$$

2. 已分組：若$\frac{n}{2}$落在第i組L_i-U_i內(即$C_i \geqq \frac{n}{2} > C_{i-1}$)

$$\text{則中位數}Me=L_i+\frac{\frac{n}{2}-C_{i-1}}{f_i}(U_i-L_i)\text{或}$$

$$Me=U_i-\frac{C_i-\frac{n}{2}}{f_i}(U_i-L_i)$$

(其中C_{i-1}為第$i-1$組之以下累積次數　　C_i為第i組之以下累積次數)

〔例1〕求下列數值之中位數① 21,14,8,11,13，② 2,15,13,14,17,20

提示：先將數值按大小順序排列，再求中位數

解答：① 8,11,13,14,21 ⇒ $Me=13$

② 2,13,14,15,17,20 ⇒ $Me=\frac{1}{2}(14+15)=14.5$

〔例2〕右表是50位學生某次考試分數的次數分配表，試求其中位數

提示：先找出中位數在那一組

解答：由以下累積次數知中位數Me落在第七組內($i=7$)

$$\therefore\ L_i=40，U_i=45，\frac{n}{2}=\frac{50}{2}=25$$

$$C_{i-2}=f_1+f_2+\cdots\cdots+f_{i-1}=20，f_i=8$$

$$Me=L_1+\frac{\frac{n}{2}-C_{i-1}}{f_i}(U_i-L_i)$$

$$=40+\frac{\frac{50}{2}\times 20}{8}\times 5=43.125$$

分數組別	次數f_i
10－15	1
15－20	1
20－25	4
25－30	2
30－35	4
35－40	8
40－45	8
45－50	10
50－55	6
55－60	2
60－65	3
65－70	0
70－75	1

99 四分位差

1. 全距：未分組資料全距$R=x_n-x_1$，分組資料全距$R=U_k-L_1$
2. 四分位差：

① 第3四分位數與第1四分位數之差的$\frac{1}{2}$即$Q.D.=\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)$

② 將n個資料按大小順序排列$x_{(1)}\leqq x_{(2)}\leqq x_{(3)}\cdots\leqq x_{(n)}$不論n為2n或是2n+1，

其中位數以上與以下的個數必然等於m個

(a) $m=2k+1$時　$Q_1=x_{(k+1)}$，$Q_{(3)}=x_{(n-k)}$

$$Q.D.=\frac{1}{2}\{x_{(n-k)}-x_{(k+1)}\}$$

(b) $m=2k$時　$Q_1=\frac{1}{2}\{x_{(k)}+x_{(k+1)}\}$　$Q_3=\frac{1}{2}\{x_{(n-k)}+x_{(n-k+1)}\}$

$$Q.D.=\frac{1}{4}\{x_{(n-k)}+x_{(n-k+1)}-x_{(k)}-x_{(k+1)}\}$$

〔例1〕試求數值資料27,12,28,30,31,30,31,15,21,16,34的全距，四分位差。

提示：須將資料按大小順序排好

解答：① 12,15,16,21,27,28,30,30,31,31,34 ⇒ 全距：$R=34-12=22$

② 四分位差：$n=11=2m+1$ ⇒ $m=5=2k+1$ ⇒ $k=2$

$\therefore\ Q_1=x_{k+1}=x_3=16$　　$Q_3=x_{n-k}=x_9=31$

$$Q.D.=\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)=\frac{1}{2}(31-16)=7.5$$

〔例2〕已知數值資料2,n,5,8,10,17之四分位差為3，求n=__________。

提示：代公式即得

解答：$Q_1=n$，$Q_3=10$

$$Q.D.=\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)=\frac{1}{2}(10-n)=3\quad\therefore\ n=4$$

100 標準差與變異係數

1. **標準差：**

① 未分組資料求標準差

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$ (其中$\bar{x}$是$x_1, x_2, \cdots x_n$之平均數)

② 由分組資料求標準差

$$S=h\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f_i d_i^{\,2}-\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(f_i d_i)^2}$$ (其中$d_i=(x_i-A)/h$，h為組距，A為簡化運算而選定的數)

2. **變異係數：** 變異係數$C.V=\frac{S}{\bar{x}}\times 100\%$(其中$\bar{x}$表算術平均數，S表標準差)

〔例1〕試求數值資料12,15,16,21,27,28,30,30,31,31,34的標準差

提示：代公式即得

解答：$\bar{x}=\frac{12+15+16+21+27+28+30+30+31+31+34}{11}=25$

$x_i-\bar{x}$：$-13,-10,-9,-4,2,3,5,5,6,6,9$

$\therefore S=\sqrt{\frac{1}{n}(x_i-\bar{x})^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{n}[(-13)^2+(-10^2)+(-9)^2+(-4)^2+2^2+3^2+5^2+5^2+6^2+9^2]}$

$=\sqrt{\frac{582}{11}}\doteqdot 7.27$

〔例2〕承上題求其變異係數

提示：變異係數 $C.V.=\frac{S}{\bar{x}}\times 100\%$

解答：變異係數 $C.V.=\frac{S}{\bar{x}}\times 100\%=\frac{7.27}{25}\times 100\%=\frac{727}{25}\%=29.08\%$