單元　各種幾何圖形（數乙）

主題 1 圖形的平移

1. 點的平移：

(1) 將點(a, b)在水平方向移動 h 單位後，該點的坐標為_____。

（$h>0$ ⇒ 向_____移；　$h<0$ ⇒ 向_____移。）

(2) 將點(a, b)在鉛直方向移動 k 單位後，該點的坐標為_____。

（$k>0$ ⇒ 向_____移；　$k<0$ ⇒ 向_____移。）

2. 圖形的平移：

將圖形$\Gamma: f(x,y)=0$水平方向平移 h 單位且鉛直方向平移 k 單位得新圖形Γ'，則Γ'的方程式為：_____。（即：$x-h$ 換 x；$y-k$ 換 y）

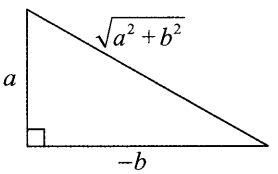
3. 沿直線 L 的平移：如何分解成水平與鉛直的平移

(1) 向量應用：

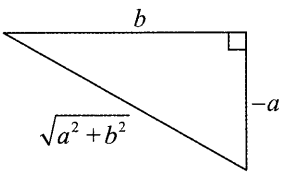
終點 = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ ⇒ 起點 = $\boxed{}$ − $\boxed{}$

(2) 令 $a>0$，$b>0$，$L: ax-by+c=0$，$\vec{n}=(a,b)\perp L$

⇒ $\vec{L}=(b,-a)\ or\ (-b,a)$，$m<0$



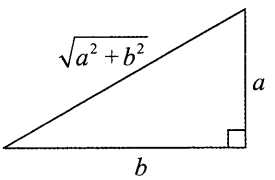
① 沿 L 左上移即沿向量$(-b,a)$平移



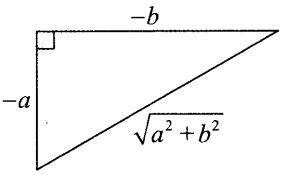
② 沿 L 右下移，即沿向量$(b,-a)$平移

(3) 令$a>0$，$b>0$，$L: ax-by+c=0$，$\vec{n}=(a,-b)\perp L$

⇒ $\vec{L}=(b,a)\ or\ (-b,-a)$，$m>0$



① 沿 L 右上移，即沿向量(b,a)平移



② 沿 L 左下移，即沿向量$(-b,-a)$平移

例題 1 將 $\Gamma: y=x^2+1$ 在水平方向移動 h 單位，再沿鉛直方向移動 k 單位後得到 $\Gamma': y=x^2+4x+3$，則數對 $(h,k)=$_____。

例題 2 將橢圓 $\Gamma: 4x^2+y^2-2y-3=0$ 平行於直線 $L: x-2y+1=0$ 向左下方平行移動 $2\sqrt{5}$ 單位後得到之橢圓爲 Γ'，則

(1) Γ' 的方程式爲_____。

(2) Γ' 的中心點坐標：_____，兩焦點坐標：_____。

主題 2　圖形的伸縮與對稱

1. 點的伸縮：

(1) 設 $A=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則 A 將每一點作水平方向伸縮 r 倍。(即：$(x,y)\to$ _____)。

(2) 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$，則 A 將每一點作鉛直方向伸縮 k 倍。(即：$(x,y)\to$ _____)。

(3) 設 $A=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$，則 A 將每一點 $(x,y)\to$ _____。

2. 圖形的伸縮：

$f(x,y)=0$ 的圖形經過 $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ 伸縮後之圖形方程式

(1) 以 $\frac{1}{r}x$ 代換 x　　(2) 以 $\frac{1}{k}y$ 代換 y

3. 函數圖形的伸縮與平移：

(1) 函數 $y=f(x)$ 圖形垂直向上平移 $\beta\ (\beta>0)$ 單位，得 $y=f(x)+\beta$
(即：$y-\beta=f(x)$)

(2) 函數 $y=f(x)$ 圖形水平向右平移 $\beta\ (\beta>0)$ 單位，得 $y=f(x-\beta)$

(3) 函數 $y=f(x)$ 圖形鉛直伸縮 $\alpha\ (\alpha>0)$ 倍，得 $y=\alpha\cdot f(x)$　(即 $\frac{y}{\alpha}=f(x)$)

(4) 函數 $y=f(x)$ 圖形水平伸縮 $\alpha\ (\alpha>0)$ 倍，得 $y=f(\frac{x}{\alpha})$

4. 對稱圖形的求法：$\Gamma: y=f(x)$

(1) 將 Γ 對 x 軸作鏡射得：_____

(2) 將 Γ 對 y 軸作鏡射得：_____

(3) 將 Γ 對原點作鏡射得：_____

(4) 將 Γ 對 $x=h$ 作鏡射得：_____

(5) 將 Γ 對 $y=k$ 作鏡射得：_____

(6) 將 Γ 對 $y=x$ 作鏡射得：_____

例題 3 將橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 以原點爲旋轉中心，逆時針旋轉 $90°$，可得另一橢圓 Γ'。若採用伸縮的方式，Γ 經過 $A=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $r>0$, $k>0$ 平面變換後，亦可得 Γ'，求數對 $(r,k)=$_____。

例題 4 將 $y=f(x)$ 的圖形，沿 x 軸方向拉伸 2 倍，沿 y 軸方向壓縮 $\frac{1}{3}$ 倍，再向右平移 4 單位，向下平移 5 單位，得圖形 $y=af(bx+c)+d$，試問下列何者正確？

(1) $a=\frac{1}{3}$ (2) $b=2$ (3) $b=-2$ (4) $c=4$ (5) $d=-5$

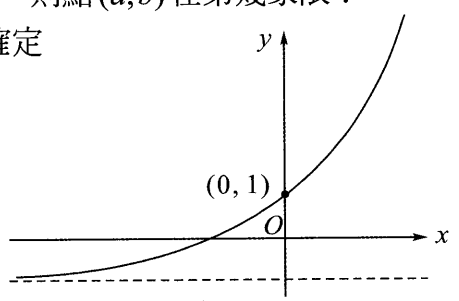
例題 5 將 $y=\sin x$ 的圖形平行 x 軸伸長 2 倍，再將圖形沿 x 軸向右平移 π 單位，所得的新圖形方程式爲 $y=\sin(ax+b\pi)$；若將 $y=\sin x$ 的圖形沿 x 軸向右平移 π 單位，再將圖形平行 x 軸伸長 2 倍，所得的新圖形方程式爲 $y=\sin(cx+d\pi)$。已知 a, b, c, d 的絕對值不大於 2，則下列那些敘述正確？

(1) $a=c$ (2) $b=d$ (3) $a=2$ (4) $b=-\frac{1}{2}$ (5) $d=1$

例題 6 設函數 $y=3\cdot 2^{2x+5}$ 的圖形是由函數 $y=2^x$ 的圖形沿鉛直方向放大 a 倍，沿水平方向縮小 b 倍，向左平移 c 個單位，試求數對 $(a,b,c)=$ _____ 。

例題 7 函數 $y=2^{x-a}+b$ 的部分圖形如右，其中虛線爲漸近線，則點 (a,b) 在第幾象限？

(1) 一　(2) 二　(3) 三　(4) 四　(5) 無法確定

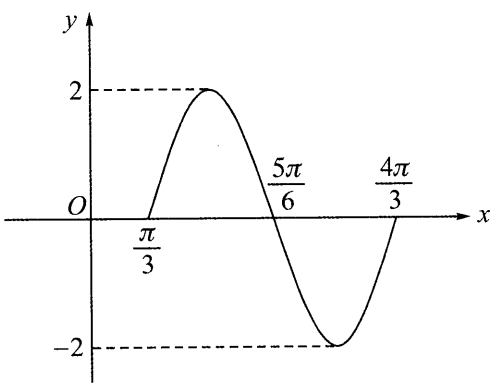


例題 8 下列何者方程式的部分圖形爲右圖？

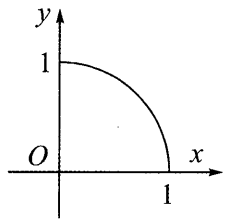
(1) $y=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$　(2) $y=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})$

(3) $y=\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$　(4) $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

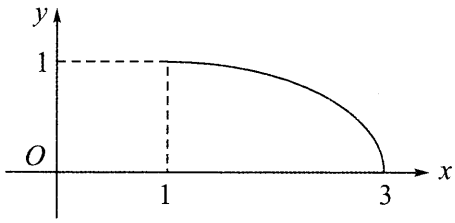
(5) $y=2\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$



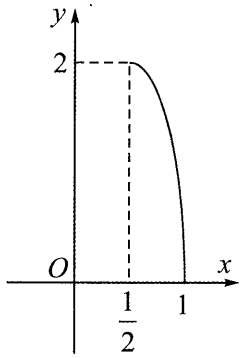
例題 9 已知 $y=f(x)$ 的圖形如右圖，則下列何者爲 $y=f(2x-1)$ 的圖形？



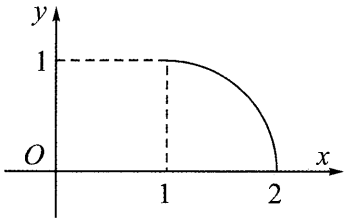
(1)



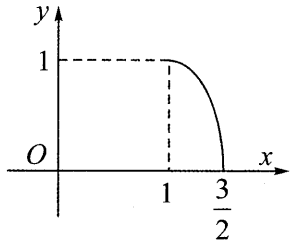
(2)



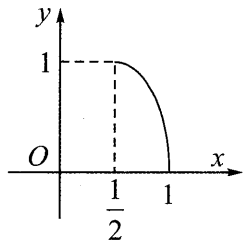
(3)



(4)



(5)



例題 10 $x^3-x-0.01=0$ 有三個實根，試問下列何者正確？

(1) $x>1$ 恰有一實根　(2) $0<x<1$ 恰有二實根　(3) $-1<x<0$ 恰有二實根

(4) $x<-1$ 恰有一實根　(5) $-1<x<1$ 恰有三實根