單元 數與式

主題 1 數與數線

1. 有理數的定義：

凡形如 $\frac{n}{m}(m,n\in Z,m\neq 0)$ 之式的數稱為有理數。

2. 有理數的性質：

(1) 任意兩有理數經加、減、乘、除(除數不能為 0)的結果，仍為有理數。

(2) 有理數的稠密性：

①設 $a,b\in Q,a<b$ 則存在 $c\in Q$ 使得 $a<c<b$

②任意兩相異有理數之間，至少有一個有理數

(3) 一個已化成最簡分數的有理數，若分母的(正)質因數只有 2 或 5，則這個有理數必可化成有限小數。

(4) 有限小數必為有理數；循環小數必為有理數

3. 無理數：

(1) 不循環的無限小數必為無理數

(2) 設 a、b 是有理數，$\sqrt{c}$ 是無理數且 $a+b\sqrt{c}=0$ 則 $a=0$ 且 $b=0$

(3) 設 a、b、p、q 是有理數，$\sqrt{c}$ 是無理數且 $a+b\sqrt{c}=p+q\sqrt{c}$，則 $a=p$ 且 $b=q$

(4) 無理數具有稠密性

4. 實數：

(1) 能在數線上找到對應位置的數，皆為實數

(2) 有理數與無理數合稱為實數

(3) 實數具有稠密性

(4) 實數的一些性質

①設$a \in R$，則 $a^2 \geq 0$

②設$a \in R$，且 $a^2 = 0$則$a = 0$

③設$a \in R$，則$(\sqrt{a})^2 = a$

④設$a \in R$，$\sqrt{a^2} = |a|$

⑤$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

5. 實數的乘法律：

(1) 設 $a, b, c \in R$, $ac = bc$ 且 $c \neq 0$ 則 $a = b$

(2) 設 $a, b, c \in R$, $a < b$ 且 $c > 0$ 則 $ac < bc$

(3) 設 $a, b, c \in R$, $a < b$ 且 $c < 0$ 則 $ac > bc$

6. 算幾不等式：

(1) 設 $a \geq 0$ ，$b \geq 0$ 則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 且〝=〞成立時$a = b$

(2) 設 $a \geq 0$ ，$b \geq 0$ ，$c \geq 0$ 則 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{abc}$ 且〝=〞成立時$a = b = c$

7. 重要的乘法公式(必須熟記)：

(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

(4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(8) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(9) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(10) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(11) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

(12) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$

例題 1　試證：(1) $\sqrt{3}$ 是無理數；(2) $2-\sqrt{3}$ 是無理數

例題 2　下列哪些選項中的數是有理數？

(A) $\sqrt{\frac{361}{289}}$　(B) $\sqrt{120}$　(C) $\sqrt{1000}$　(D) $\sqrt{\frac{5}{3}}$　(E) $2-\sqrt{3}$

例題 3　下列哪些選項是正確的？

(A)若 $a+b$ 與 ab 均為無理數，則 a 與 b 均為無理數

(B)若 $a+b$ 為無理數，則 a 與 b 中至少有一個為無理數

(C)若 $a+b$ 為有理數，則 a 與 b 中至少有一個為有理數

(D)若 a、b 為無理數，則 $a+b$ 必是無理數

(E)若 $a+b$、$b+c$ 與 $c+a$ 均為有理數，則 a、b、c 必皆為有理數

例題 4　設 $a \in R$，$a \neq 0$ 且 a^{13}與 a^{7} 皆為有理數，則 a^{3}是否一定為有理數？

例題 5　設 $a \in R$，$a \neq 0$ 且 a^{21}與 a^{35} 皆為有理數，則 a^{3}是否一定為有理數？

例題 6　設 x、$y \in Q$ 且$(2+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=7-\sqrt{3}$，則$x+y=$_____。

例題 7　設$x > 0$，$y > 0$，$xy = 16$，則$\frac{2}{x} + \frac{50}{y}$之最小值為_____，此時數對$(x、y) =$ _____。

例題 8　設$f(a) = a + \frac{2}{a} + \frac{8a}{a^2+2}$，$a > 0$則$f(a)$的最小值為_____。

例題 9　若$x + \frac{2}{x} = 5$，則$x^3 + \frac{8}{x^3} =$_____。

例題 10　若$a + b + c = 3$，$a^2 + b^2 + c^2 = 5$，$a^3 + b^3 + c^3 = 15$，則$abc =$_____。

主題 2　數線上的幾何

1. 實數的絕對值：

(1) 設 $x \in R$，則 $|x| = \begin{cases} x，當\ x \geq 0\ 時 \\ -x，當\ x \leq 0\ 時 \end{cases}$

(2) 設 $x \in R$，則 $|x| \geq 0$，且 $|-x| = |x|$

(3) 設 $x \in R$，則 $\sqrt{x^2} = |x|$

(4) 設 $x \in R$，且 $a > 0$ 則

① $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

② $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

③ $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ 或 $x \leq -a$

2. 數線上兩點之間的距離：

(1) 於數線上，設 A、B 兩點所代表的數分別為 x 與 y，則 A 與 B 兩點之間的距離為 $\overline{AB} = |x - y|$

(2) 設 x、$y \in R$ 則

① $|xy| = |x||y|$

② $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (其中 $y \neq 0$)

③ $|x + y| \leq |x| + |y|$ 且〝＝〞成立時，$xy \geq 0$

④ $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$ 且〝＝〞成立時，$xy \geq 0$

3. 設 $a > b$ 且 $x \in R$，則：

(1) $b \leq x \leq a \equiv \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{a-b}{2}$

(2) $x \geq a$或$x \leq b \equiv \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \geq \frac{a-b}{2}$

4. 內分點公式：

於數線上有相異兩點$A(a)$、$B(b)$，點 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{m}{n}$

則點 P 之坐標為 $\frac{na+mb}{m+n}$

5. 設 x、y 皆為正數，則：

(1) $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$　　(2) $\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}} = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|$

例題 11　設$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$的整數部分為 n，小數部分為 b，則 $\frac{b}{2} + \frac{1}{b} =$_____。

例題 12　設 $a \in R$ 且 a 之小數部分為 b，若$a^2 + b^2 = 38$，則 $a =$_____。

例題 13　設 a、$b \in R$，且不等式$|ax - 2| < b$ 之實數解為$5 < x < 13$，則數對(a，b)= _____。

例題 14　設 m、n∈R，且不等式$|mx+2|>n$之實數解為$x>18$或$x<-4$，則數對(m, n)= _____。

例題 15　設 x，y ∈R，且$|x+3y-20|+\sqrt{(x-y+100)^2}=0$則$x^2-y^2=$_____。

例題 16　方程式$|x+2|+|2x-3|=10$之實解為_____。

例題 17　設$f(x)=|x+1|+|x+2|+|x-5|$則$f(x)$之最小值為_____。

≺ 精選練習暨歷屆學測試題 ≻

1. 下列哪些選項的數是有理數？

(A) -7　(B) $\sqrt{18}$　(C) $\sqrt{\frac{289}{169}}$　(D) $\pi+3$　(E) 0.38

答：(A) (C) (E)

2. 將有理數 $\frac{3}{7}$ 化成小數時，若 a_n 表示小數點後第 n 位的數字，則下列哪些選項是正確的？

(A) $a_3=8$　(B) $a_1+a_5=10$　(C) $a_3=a_9$　(D) $a_{20}=a_{26}$　(E) $a_{11}=a_{19}$

答：(A) (C) (D)

3. 設 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ 之整數部分為 a，小數部分為 b，則 $\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b-1}=$_____。

答：$2\sqrt{5}$

4. 設 $a>0$ 且 a 之小數部分為 b，若 $a^2+2b^2=15$，則 $a+b=$_____。

答：$1+2\sqrt{3}$

5. 設 x，y 為有理數，且 $x+y\sqrt{19+8\sqrt{3}}=x\sqrt{21-12\sqrt{3}}+15\sqrt{3}$，則數對 (x，y) 之值為_____。

答：(-5，5)

6. 設 x、y $\in R$ 且 $-2\le x\le 3$，$3\le y\le 6$ 則下列哪些選項是正確的？

(A) $x+y$ 之最小值為 1　(B) $x-y$ 之最大值為 0

(C) xy 之最小值為 -6　(D) $\frac{1}{x}$ 之最大值為 $\frac{1}{3}$

(E) x^2 之最小值為 4

答：(A) (B)

7. 設 $x\in R$ 且 $|x+3|+|x-7|\le k$ 之解為無解，則實數 k 的範圍為_____。

答：$k<10$

8. 設 $x \in R$ 且 $f(x)=\sum_{K=1}^{51}|x-k|$ 則 f (x) 之最小值為_____。

答：650

9. 設 a、b $\in R$ 且 $|ax-7| \leq b$ 之解為 $3 \leq x \leq 13$ 則數對(a，b)= _____。

答：$(\frac{7}{8}，\frac{35}{8})$

10. 設 a、b、c $\in R$ 且 $|a|<1$，$|b|<1$，試證：

(1) $ab-1<a-b$　　(2) $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$

答：請參閱詳解

11. 設 $a=\sqrt{7+\sqrt{47}}$，則 a 在哪兩個連續整數之間？　【83 年學測】

(A) 0 與 1　(B) 1 與 2　(C) 2 與 3

(D) 3 與 4　(E) 4 與 5　　答：(D)

12. 試選出下列正確的選項：　【88 年學測】

(A) $0.3\overline{43}$ 不是有理數　(B) $0.\overline{34}>\frac{1}{3}$　(C) $0.\overline{34}>0.343$

(D) $0.\overline{34}<0.35$　(E) $0.\overline{34}=0.3\overline{43}$　　答：(B) (C) (D) (E)

13. 設實數 a、b、c 滿足 $abc>0$，$ab+bc+ca<0$，$a+b+c>0$，$a>b>c$，則下列選項何者正確？　【91 年學測】

(A) $a>0$　(B) $b>0$　(C) $c>0$

(D) $|a|>|b|$　(E) $a^2>c^2$　　答：(A) (D) (E)

14. 設實數 a、b 滿足 $0<a<1$、$0<b<1$，則下列哪些選項必定正確？

(A) $0<a+b<2$　(B) $0<ab<1$　(C) $-1<b-a<0$

(D) $0<\frac{a}{b}<1$　(E) $|a-b|<1$　【91 年學測補考】

答：(A) (B) (E)

≺ 練習暨學測試題詳解 ≻

1.【解析】略

2.【解析】$\because \frac{3}{7}=0.428571$ $\therefore a_3=8$，$a_1+a_5=11$，$a_3=a_9=8$

$a_{20}=a_{26}=a_2=2$，$a_{11}=a_{19}=a_5=7$

3.【解析】$\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{14+2\sqrt{45}}=\sqrt{9}+\sqrt{5}=3+\sqrt{5}$

整數部分$a=5$，小數部分$b=\sqrt{5}-2$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{a+b-1}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}$$

4.【解析】由題意知$0\le b<1\Rightarrow 0\le b^2<1\Rightarrow 0\le 2b^2<2$

$\because a^2+b^2=15$ $\therefore 13<a^2\le 15\Rightarrow \sqrt{13}<a\le\sqrt{15}$

$\therefore$a 之整數部分為 3 $\therefore a=3+b$

故$(3+b)^2+2b^2=15$ $\Rightarrow 3b^2+6b-6=0$

$\Rightarrow b^2+2b-2=0$ $\Rightarrow b=-1\pm\sqrt{3}$(負不合)

$\therefore b=-1+\sqrt{3}$

$$a+b=3+b+b=3+2b=3-2+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}$$

5.【解析】由題意知$x+y\sqrt{19+2\sqrt{48}}=x\sqrt{21-2\sqrt{108}}+15\sqrt{3}$

$x+y(\sqrt{16}+\sqrt{3})=x(\sqrt{12}-\sqrt{9})+15\sqrt{3}$

$x+y(4+\sqrt{3})=x(2\sqrt{3}-3)+15\sqrt{3}$

$x+4y+y\sqrt{3}=-3x+(2x+15)\sqrt{3}$

$\begin{cases} x+4y=-3x \\ 2x+15=y \end{cases}$　　$\begin{cases} 4x+4y=0 \\ 2x-y=-15 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-5 \\ y=5 \end{cases}$　　即數對(x，y)=(-5，5)

6.【解析】(C) xy 之最小值為-12；(D) $\frac{1}{x}$ 之最大值不存在；(E) x^2 之最小值為 0

7.【解析】$|x+3|+|x-7|$之最小值為 10

故當$k<10$ 時，不等式$|x+3|+|x-7|\le k$ 無解

8.【解析】當 x 為 1、2、3、⋯、51 之中位數時，f (x) 有最小值

$\therefore$最小值為$f(26)=25+24+23+\cdots+1+0+1+2+\cdots+25$

$$=\frac{(25+1)\times 25}{2}\times 2=650$$

9.【解析】$|ax-7|\le b\equiv 3\le x\le 13$

$\equiv |x-8|\le 5$

$\equiv \left|\frac{7}{8}x-7\right|\le \frac{35}{8}$

$\therefore a=\frac{7}{8}$，$b=\frac{35}{8}$　　即數對(a，b) = $(\frac{7}{8}，\frac{35}{8})$

10.【解析】(1) $\because |a|<1$，$|b|<1$

$\therefore -1<a<1$，$-1<b<1$　　$\Longrightarrow a+1>0$，$b-1<0$

$\Longrightarrow (ab-1)-(a-b)=ab-a+b-1=(a+1)(b-1)<0$

$\Longrightarrow ab-1<a-b$

(2) $-1 < a < 1$， $-1 < b < 1$

$\therefore 1+a>0$，$1-a>0$，$1+b>0$，$1-b>0$

又 $\left|1+ab\right|^2 - \left|a+b\right|^2 = 1+2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2$

$= 1-a^2-b^2+a^2b^2 = (1-a^2)(1-b^2)$

$= (1-a)(1+a)(1-b)(1+b) > 0$

$\therefore \left|1+ab\right|^2 > \left|a+b\right|^2 \Rightarrow \frac{\left|a+b\right|^2}{\left|1+ab\right|^2} < 1 \quad \Rightarrow \left|\frac{a+b}{1+ab}\right|^2 < 1$

$\Rightarrow \left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$

11.【解析】$a = \sqrt{7+\sqrt{47}} = \sqrt{7+6.\cdots} = \sqrt{13.\cdots} = 3.\cdots$

12.【解析】(A) $0.3\overline{43} = \frac{343-3}{990} = \frac{34}{99}$ 是有理數

(B) $0.\overline{34} = 0.343434\cdots > 0.333\cdots = \frac{1}{3}$

(C) $0.\overline{34} = 0.343434\cdots > 0.343$

(D) $0.\overline{34} = 0.343434\cdots < 0.35$

(E) $0.3\overline{43} = 0.3434343\cdots 0.\overline{34}$

13.【解析】$\because abc > 0$ 且 $ab+bc+ca < 0$

$\therefore$ a、b、c 三者中必一正兩負

又 $a > b > c$

`$\therefore a > 0 > b > c$

又 $a+b+c > 0$

$\therefore |a| > |b+c|$

$\therefore |a| > |b|$且$|a| > |c|$

$\therefore a^2 > c^2$

14.【解析】(C)取$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$

(D)取$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{6}$