單元 多項式函數的微分

☆ 1 微分 ☆

主題 1 導數與切線

1. 導數與可微分：

(1) 當極限值 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在時，我們稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數存在，並將此極限稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數，一般以 $f'(a)$ 表示

(2) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(3) 若 $f'(a)$ 存在，我們就稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分；

反之稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 不可微分

2. 導數的另一種表示式：

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處之導數存在(即 $f'(a)$ 存在)

則 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

例題 1 設 $f(x)=2x^2+3x-5$，則 $f(x)$ 在 $x=2$ 處之導數為_____

例題 2 設 $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$，則 $f(x)$ 在 $x=3$ 處之導數為_____

例題 3　設 $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x-1}$，則$f'(2)=$_____

例題 4　設$f(x)=\sqrt{x}$，則$f'(3)=$_____

例題 5　設$f(x)=\sqrt[3]{x}$，則$f'(8)=$_____

例題 6　設$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$，則$f(x)$在$x=2$處之導數為_____

版權出品

例題 7　設$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，則$f(x)$在 $x=0$處之導數為_____

例題 8　設$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-4}$，則$f'(2)=$_____

例題 9　設$f(x)=\frac{(1-x)(2-x)(3-x}{(1+x)(2+x)(3+x)}$，則$f'(3)=$_____

例題 10　設$f(x)=|x|$，則：

(1) $f'(1)=$_____；$f'(-1)=$_____　　(2) $f'(0)=$_____

例題 11　設$f(x)=|x-2|$，則$f(x)$在$x=2$處是否可微分？

滕嘉出品

例題 12　設$f(x)=|x^2-4x|$，則：

(1) $f(x)$在$x=0$處是否可微分？　　(2) $f(x)$在$x=2$處是否可微分？

(3) $f(x)$在$x=4$處是否可微分？

例題 13　設$f(x)=\begin{cases} x-1，當\ x\geq 1\ 時 \\ x^2-x，當\ x<1\ 時 \end{cases}$

(1) $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$_____　　(2) $f'(1)=$_____

(3) $f(x)$在$x=1$處是否可微分？

例題 14　設$f(x)=\begin{cases} 4x-x^2，當\ x\leq 1\ 時 \\ 2+x^2，當\ x>1\ 時 \end{cases}$，則$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$_____

康軒出版

例題 15　設 $f(x)$滿足$f(2)=1$，$f'(2)=3$，則$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-5h)}{4h}=$_____

例題 16　設$f(x)$滿足$f(1)=3$，$f'(1)=5$，則$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x^2-1}=$_____

例題 17　設$f(a)$與$f'(a)$皆存在，則$\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$_____(請以$f(a)$與$f'(a)$表示)

例題 18　設 $f(x)$ 在$x=a$處可微分，試以$f(a)$與$f'(a)$表示，則

$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3f(x)-a^3f(a)}{x-a}=$_____

例題 19　設函數$f(x)$滿足對任意實數 a、b 皆使$f(a+b)=f(a)+f(b)+5ab$且

$f'(0)=3$，則：

(1) $f(0)=$_____　　(2) $f'(x)=$_____

版權出品

主題 2　導數的幾何意義與物理意義

1. 導數與切線方程式：

(1) 若函數 $f(x)$ 在$x=a$處可微分，則Γ：$y=f(x)$在點 $P(a,f(a))$ 之切線的斜率為$f'(a)$

(2) 若$f'(a)$存在，則Γ：$y=f(x)$在點 $P(a,f(a))$ 之切線的方程式為

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(3) 若$f'(a)$存在且$f'(a)\neq 0$，則Γ：$y=f(x)$在點 $P(a,f(a))$ 之法線的方程式為$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$