單元　基礎概念

主題 1　集合基本概念

1. **子集**意義：

若集合 A 的每一元素均是集合 B 的元素，則稱 A 是 B 的子集(部分集合) 記作 $\boldsymbol{A \subset B}$

(1) $A \subset A$

(2) $\phi \subset A$

(3) 若集合 A 中有 K 個元素 $(n(A)=k)$，則 A 共有 2^K 個子集

〈即 $C_0^K + C_1^K + \cdots + C_K^K = 2^K$〉

2. 集合運算：設 A , B 為兩個集合

(1) **聯集**：$\boldsymbol{A \cup B} = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$

(2) **交集**：$\boldsymbol{A \cap B} = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$

(3) **差集**：$\boldsymbol{A - B} = \{x \mid x \in A$ 但 $x \notin B\}$

3. 基集(宇集)與補集(餘集)：

(1) **基集**：在討論的問題中，所有集合均是某固定集合的子集，則此固定集合稱為基集。

(2) **補集**：設 U 為基集，$A \subset U$，則 $U - A = \{x \mid x \in U$ 但 $x \notin A\}$ 稱為 A 的補集，

記作 A' 或 $\overline{A}$　即 $\overline{A} = U - A$

(3) **運算**：

$$\left.\begin{array}{l} ① \ A - B = A \cap \overline{B} \\ ② \ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\} \text{狄摩根定理}$$

$$③ \ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

4. 集合計數：$n(A)$ 表 A 集合的元素個數

(1) $\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

(2) $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)}$

例題 1 設集合 $A=\{x\mid 2x^2-3x+1=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若滿足 $B\subset A$，則實數 a 的值可能等於

(1) 1　(2) 2　(3) 0　(4) $\frac{1}{2}$　(5) -1

例題 2 設集合 $A=\{1,2,\cdots 10\}$，求集合 A 的所有非空子集元素的總和是多少？_____

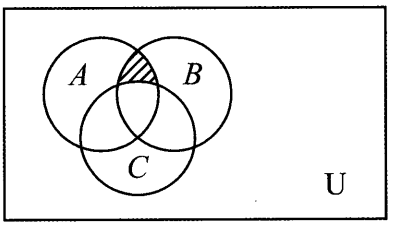
老師叮嚀

對於離散集合，抽象解法常輔以文氏圖；對於連續集合常輔以數線；點集常輔以坐標平面。這樣可增加直觀性，減少不必要的失誤。

例題 3 如圖 U 是基集，A、B、C 是 U 的三個子集，則陰影部分所表示的集合是

(1) $(A\cap B)\cap C$　(2) $(A\cap B)\cup C$

(3) $(A\cap B)\cap \overline{C}$　(4) $(A\cap B)\cup \overline{C}$



例題 4 設宇集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，A、B 均爲 U 的子集，已知 $\overline{A}\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,5\}$ 求 (1) $\overline{(A\cup B)}=$_____　(2) $A\cap\overline{B}=$_____

例題 5 某班第一次段考國文，英文，數學三科成績中，至少有一科滿分的同學有 18 人，國文滿分有 9 人，英文滿分有 8 人，數學滿分有 11 人，國文、數學都滿分的有 5 人，數學、英文都滿分的有 3 人，國文、英文都滿分的有 4 人，試求 (1) 國文、數學兩科中至少一科得滿分的學生多少人？ (2) 國、英、數三科均滿分的有多少人？

老師叮嚀

利用文氏圖解題時，由相交最多的開始填起！

主題 2　簡易邏輯概念

1. **複合敘述**：

   用“且”或“或”連接兩敘述而成，設 p、q 為兩敘述，p 且 q 記作 $p\wedge q$；

   p 或 q 記作 $p\vee q$

   Note **若兩敘述有相同的真假值，則稱此兩敘述為同義（或稱等價）以“≡”表之。**

2. **否定語句**：敘述 p 之否定稱為“非 p”記作“$\sim p$”，常見之否定句如下

   (1) $\sim(p\wedge q)\equiv$_____

   (2) $\sim(p\vee q)\equiv$_____

   (3) “$\forall x\in A$ 具有性質 P”之否定句是：_____

   (4) “$\exists x\in A$〈即至少有一元素 $x\in A$〉具有性質 P”的否定語句是：

   _____。

(5) “至少有 n 個元素具有性質 p”之否定語句是：

_____

(6) “至多有 n 個元素具有性質 p”之否定語句是：

_____

說例 (1) 全班均不及格之否定 ：_____

(2) 有人不及格之否定 ：_____

(3) 至少 10 人及格之否定 ：_____

(4) 至多 10 人及格之否定 ：_____

3. **命題**：

「若 p 則 q」記作 “ $p \to q$ ”此種語句稱為**命題**

4. 命題四態：

命題名稱	命題	記法
原命題	若 p 則 q	$\boldsymbol{p \to q}$
逆命題	若 q 則 p	$\boldsymbol{q \to p}$
否命題	若非 p 則非 q	$(\sim \boldsymbol{p}) \to (\sim \boldsymbol{q})$
否逆命題	若非 q 則非 p	$(\sim \boldsymbol{q}) \to (\sim \boldsymbol{p})$

5. 真假值表

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \to \sim p$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	F

(1) 「 $p \to q$ 」 $\equiv$ 「 $\sim p \vee q$ 」 $\equiv$ 「 $(\sim q) \to (\sim p)$ 」

(2) $\sim (p \to q) \equiv$ 「 $p \wedge (\sim q)$ 」

6. 條件問題：

(1) 當命題「若 p 則 q」為真時，以「 $p \Rightarrow q$ 」表之，此時稱 p 是 q 的_____條件；而稱 q 是 p 的_____條件。

(2) 當命題「若 p 則 q」與「若 q 則 p」均為真時，以「 $p \Leftrightarrow q$ 」表之，此時稱 p 與 q 互為充分且必要條件，簡稱_____條件。

(3) 集合 “ $A \subset B$ ”相當於 “ $A \Rightarrow B$ ”

例題 6 若敘述 p 表 $x>0$；q 表 $x\le 5$，已知複合敘述“$p\wedge q$”爲僞，則下列何者可爲 x 的值？
(1) 0　(2) -1　(3) 2　(4) 5　(5) 6

例題 7 在自然數中探討某命題，若 $n=k$ 時該命題成立，則 $n=k+1$ 時，也可推導出該命題成立。今已知 $n=3$ 時該命題不成立，那麼可確知的情況是
(1) $n=2$ 時該命題成立　(2) $n=2$ 時該命題不成立　(3) $n=4$ 時該命題成立
(4) $n=4$ 時該命題不成立　(5) 對所有自然數該命題均不成立

例題 8 下列四個命題均是眞確的：
(一) 若 A 爲紅色則 B 爲綠色
(二) 若 A 非紅色則 B 爲藍色
(三) 若 B 爲綠色則 C 爲黑色
(四) 若 C 爲黑色則 D 非白色
今已知 D 爲白色，試問 B 爲何種顏色？
(1) 紅色　(2) 白色　(3) 藍色　(4) 綠色　(5) 無法判定

例題 9 有四個代號 ①充分非必要 ②必要非充分 ③充要 ④非充分且非必要。
試以代號填入下列空格中：

(1) 已知甲是乙的必要條件，丙是乙的充分條件，則丙是甲的_____條件。

(2) $(x-3)(y+5)=0$ 是 $(x-3)^2+(y+5)^2=0$ 的_____條件。

(3) 已知 $p:a>2$ 且 $b>2$；$q:a+b>4$ 且 $ab>4$；則 p 是 q 的_____條件。

(4) $A=\{x\mid x^2-2x-3\le 0\}$，$B=\{x\mid x^2-6x+8\le 0\}$，$x\in A$ 是 $x\in B$ 的_____條件。

(5) 設 $a,b\in R$ 則 $ab>0$ 是 $|a+b|=|a|+|b|$ 的_____條件。

老師叮嚀

反證法：先假設命題結論不成立，再通過推理導致以下矛盾之一即可：

① 與已知條件矛盾

② 與定義、定理，公設矛盾

③ 與客觀事實矛盾

④ 自相矛盾

例題 10 試證 ΔABC 能夠內接於單位圓的必要條件是：ΔABC 中必有一邊長不大於 $\sqrt{3}$。