陳宏澤 老師

師範大學數學研究所
師範大學數學系
國立基隆女中4年
曾任板中資優班老師29年
教學績優錄取美
國教育數學考查並在
漢華、瀚林、建宏出版社
出版高中數學講義多年
主講老師教學優點

教學資歷完整高中
數學教學達三十餘
年，對升大學數學
學測命題有長期深
入的研究，最能抓
住命題的核心；教
學的內容完全針對
學測的命題，而且
具細糜遺若能依照
老師的教授去執行
、學習數學學測的
成績肯定可獲高分
。

¤ 最新升大學學測及指考試題解析 ¤

一、單選題：(占 30 分)

01. 出自 2-2 排列組合

解析：(1)×：可能英文成績達 70 分，但數學成績不及格

(2)×：可能英文成績未達 70 分，但數學成績及格

(3)×：可能英文成績 70 分以上，但數學成績不及格

(4)×：可能英文成績 70 分以上且數學不及格

「英文成績未達 70 分」或「數學成績不及格」

(5)○：「英文成績未達 70 分」或「數學成績不及格」

故選(5)

02. 出自 1-3 指數與對數

解析：a：$2.6^{10}-2.6^{9}=2.6^{9}(2.6-1)=1.6\times 2.6^{9}$

b：$2.6^{11}-2.6^{10}=2.6^{10}(2.6-1)=1.6\times 2.6\times 2.6^{9}$

c：$\frac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}=\frac{2.6^{9}(2.6^{2}-1)}{2}=\frac{2.6^{9}\times(2.6-1)\times(2.6+1)}{2}$

$=1.6\times 1.8\times 2.6^{9}$

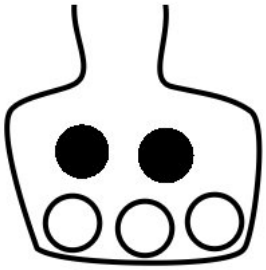
$\therefore \mathrm{b}>c>a$

故選(4)

03. 出自 2-3 機率

解析：令 A：甲和乙抽到相同顏色球

B：丙抽到白色球



$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

所求$=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}$

04. 出自 2-4 數據分析

解析：

(1)

x	2	3	5
y	1	13	1

(2)

x	2	3	5
y	3	10	2

(3)

x	2	3	5
y	5	7	3

(4)

x	2	3	5
y	9	1	5

(5)

x	2	3	5
y	7	4	4

由五個選項中的數據知：

①各選項之 x 均相同，∴各選項 S_x 均相同且各選項之 $\overline{X}$ 亦均相同

②各選項之 y 值雖不同，但和相等，∴各選項之 $\overline{Y}$ 均相同(其中 $\overline{Y}=5$)

③迴歸直線方程式為 $y-\overline{Y}=r\frac{S_Y}{S_X}(x-\overline{X})$

∵各選項之迴歸直線均相同

∴各選項之 $r\cdot\frac{S_Y}{X}$ 均相等

∵$S_X>0$，$S_Y>0$，$r>0$

∴當 S_r 最小時，$\frac{S_Y}{S_X}$ 最小，此時 $|r|$ 最大

即 r 最小

(1) ${S_Y}^2 = \frac{1}{3}[(1-5)^2 + (13-5)^2 + (1-5)^2] = 32$

(2) ${S_Y}^2 = \frac{1}{3}[(3-5)^2 + (10-5)^2 + (2-5)^2] = \frac{38}{3}$

(3) ${S_Y}^2 = \frac{1}{3}[(5-5)^2 + (7-5)^2 + (3-5)^2] = \frac{8}{3}$

(4) ${S_Y}^2 = \frac{1}{3}[(9-5)^2 + (1-5)^2 + (5-5)^2] = \frac{32}{3}$

(5) ${S_Y}^2 = \frac{1}{3}[(7-5)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2] = 2$

故選(5)

05. 出自 2-2 排列組合

解析：設紅、黃、綠的三個籃子分別裝 x、y、z 顆雞蛋

$\Longrightarrow x + y + z = 24$

由題意知 y、z 為正奇數

∴x 為正偶數

令 $x' = \frac{x-2}{2}$，$y' = \frac{y-1}{2}$，$z' = \frac{z-1}{2}$

$\longrightarrow x'$，y'，z' 為非負的整數

且 $x' + y' + z' = \frac{x-2}{2} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-1}{2} = \frac{x+y+z-4}{2} = 10$

而 $x' + y' + z' = 10$ 之非負的整數解 $\xleftrightarrow{1\text{ 對 }1}$

$x + y + z = 24$ 且 x 為正偶數，y 與 z 為正奇數

∴所求$= H_{10}^{3} = C_{10}^{12} = C_{2}^{12} = 66$

故選(2)

06. 出自 3-1 三角

解析：令 P 表觀測點

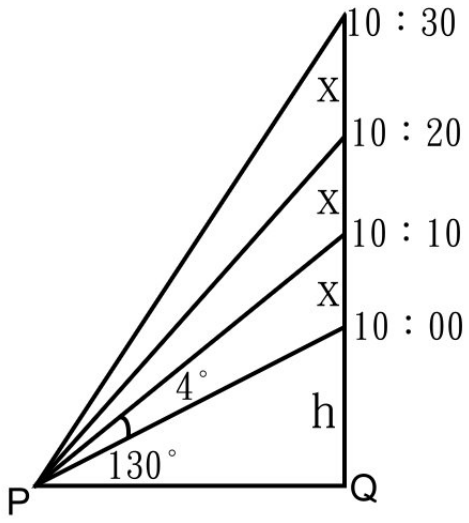
Q 表熱氣球在地面的投影點

令 $\overline{PQ} = d$

∵熱氣球「等速率垂直上升」

∴設熱氣球每 10 分鐘上升 x

如右圖所示



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{h}{d} = \tan 30° = 0.577 \\ \dfrac{h+x}{d} = \tan 34° = 0.675 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = 0.577d \\ h + x = 0.675d \end{cases} \longrightarrow x = 0.675d - 0.577d = 0.098d$$

令 10：30 時熱氣球的仰角為 θ

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{h+3x}{d} = \frac{0.577d + 3 \times 0.098d}{d} = 0.871$$

由表知 $\tan 41° = 0.869$ ， $\tan 42° = 0.900$

∴ θ 最接近 41°

故選(3)

二、多選題：(占 30 分)

07. 出自 4-3 矩陣

解析：$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$……①

$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$……②

$\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$……③

∴ (1)○：由①知 $a_2 = 1$

(2)○：$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 1$　∴a_1，a_2，a_3 為等比數列

(3)○：$d_1 = 2$，$d_2 = 4$，$d_3 = 8$　∴d_1，d_2，d_3 為等比數列

(4)×：$b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_4 = 7$　∴b_1，b_2，b_3 不為等差數列

(5)○：$c_1 = 0$，$c_2 = 0$，$c_3 = 0$　∴c_1，c_2，c_3 為等差數列

故選(1) (2) (3) (5)

08. 出自 1-3 指數與對數

解析：條件：$a > 1 > b > 0$

(1)○：$\because a > 1$　$\therefore a^7 < a^9$　$\therefore -a^7 > -a^9$　$\therefore (-a)^7 > (-a)^9$

(2)○：$\because 1 > b > 0$　$\therefore 1 > b^7 > b^9 > 0$　$\therefore b^{-9} > b^{-7} > 1$

(3)×：$\because a > 1 > b > 0$　$\therefore 0 < \frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$　$\therefore \log_{10}\frac{1}{a} < \log_{10}\frac{1}{b}$

(4)×：$\log_a 1 = \log_b 1 = 0$

(5)×：取 $a = 2$，$b = \frac{1}{4}$

$\longrightarrow \log_a b = \log_2 \frac{1}{4} = -2$，$\log_b a = \log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2}$

此時 $\log_a b < \log_b a$

故選(1) (2)

09. 出自 1-2 多項式

解析：不妨令 $f(x)=m(x-a)(x-b)$，$g(x)=n(x-b)(x-c)$，其中 $m>0$，$n>0$

$$\begin{aligned}\longrightarrow f(x)+g(x)&=m(x-a)(x-b)+n(x-b)(x-c)\\&=(x-b)[mx-ma+nx-nc]\\&=(x-b)[(m+n)x-(ma+nc)]\\&=(m+n)(x-b)(x-\frac{ma+nc}{m+n})\end{aligned}$$

其中 $m+n>0$

$\therefore y=f(x)+g(x)$的圖形仍為一開口向上的拋物線

①當 $\frac{ma+nc}{m+n}=b$時$y=f(x)+g(x)$的圖形與 x 軸僅交於一點(b，0)，

(b，0)$=(\frac{ma+nc}{m+n}$，0)為拋物線的頂點

②當 $\frac{ma+nc}{m+n}\neq b$ 時，$y=f(x)+g(x)$ 的圖形與 x 軸交於兩點(b，0)與($\frac{ma+nc}{m+n}$，0)

(1)✕：拋物線

(2)✕：拋物線

(3)✕：至少有一交點

(4)○：可能與 x 軸僅交於一點的拋物線

(5)○：可能與 x 軸交於兩點的拋物線

故選(4) (5)

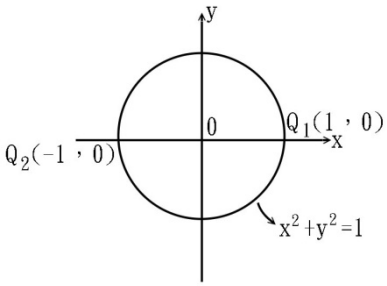
10. 出自 4-4 二次曲線

解析：$Q_1(1，0)$，$Q_2(-1，0)$，令$P(x，y)$

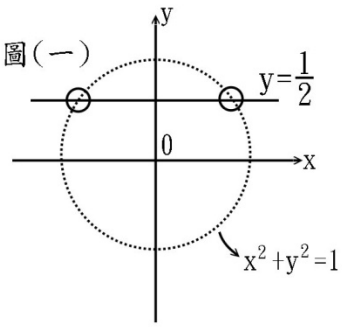
$$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0\equiv(1-x，-y)(-1-x，-y)<0$$
$$\equiv(1-x)(-1-x)+y^2<0$$
$$\equiv(x-1)(x+1)+y^2<0$$
$$\equiv x^2+y^2<1$$

故滿足$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$之 P 點所成的軌跡，恰是

圓 C：$x^2+y^2=1$的內部，如右圖所示

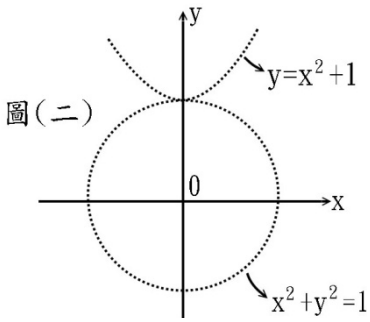


(1)○：有無窮多個點滿足，如圖(一)

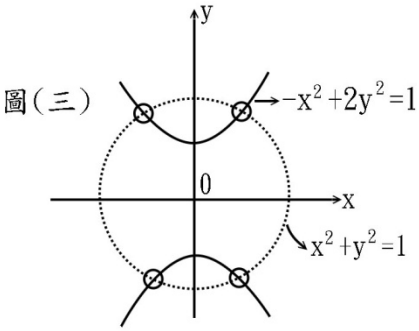


(2)✕：拋物線$y=x^2+1$不存在位於圓內之點，

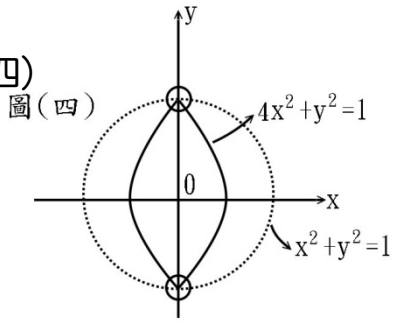
如右圖(二)



(3)○：有無窮多個點滿足，如圖(三)

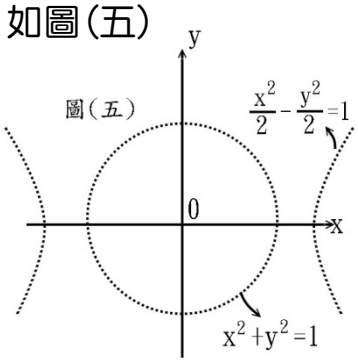


(4)○：有無窮多個點滿足，如圖(四)



(5)✕：雙曲線$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$不存在位於圓內之點， 如圖(五)

故選(1) (3) (4)



11. 出自 4-4 二次曲線

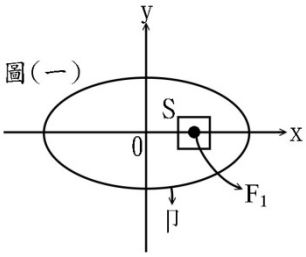
解析：不妨令橢圓Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$

F_1，F_2 為 Γ 之兩焦點

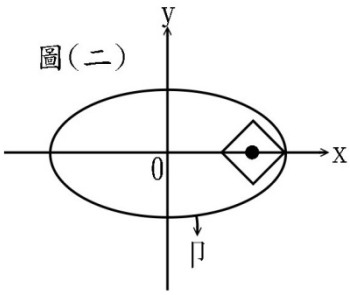
$F_1(c，0)$，$F_2(-c，0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$

S：以 F_1 為中心的正方形

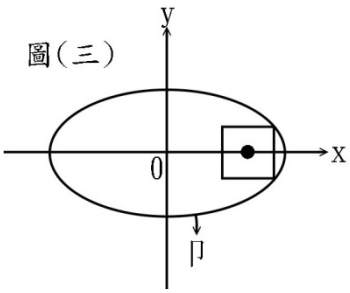
①S 可能沒有頂點在 Γ 上，如圖(一)



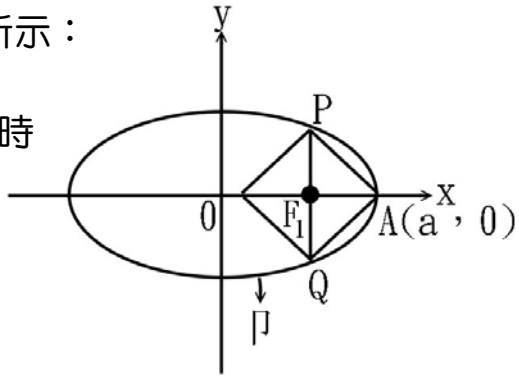
②S 可能恰有一個頂點在 Γ 上，如圖(二)



③S 可能有兩個頂點在 Γ 上，如圖(三)



④ S 不可能有超過兩個頂點在 Γ 上，如右圖所示：



當$a-c=\frac{b^2}{a}$時 S 可能有三個點在 Γ 上，此時

$a^2-ac=b^2$，即$a^2-b^2=ac$

即 $c^2=ac$，即$a=c$，此為不可能的！

故 S 不可能有三個頂點在 Γ 上，當然也不會有四個頂點在 Γ 上

故選 (1) (2) (5)

12. 出自 2-1 數列與級數

解析：前言：

$\because <a_n>$是公比為-0.8 的等比數列

$<b_n>$是首項為 10 的等差數列，設公差為 d

$\because a_n=a_1\times(-0.8)^{n-1}$

$b_n=10+(n-1)d$

$\because a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$

$\therefore 10+9d<(-0.8)a_9<(-0.8)\cdot(10+8d)$

$\therefore 10+9d<-8-6.4d \quad \therefore 15.4d<-18 \quad \therefore d<\frac{-18}{15.4} \quad \therefore d<-\frac{90}{77}$

(1)○：$\because \frac{a_{10}}{a_9}=-0.8 \quad \therefore a_9\times a_{10}<0$

(2)✕：$b_{10}=10+9d<10+9\times\left(-\frac{90}{77}\right)=-\frac{40}{77}<0$

(3)○：$d<0 \quad \therefore b_9>b_{10}$

(4)✕：若$a_1>0$，則 $a_9>0>a_{10}$，若$a_1<0$，則$a_9<0<a_{10}$

(5) ✕：$b_8 = 10 + 7d < 10 + 7 \times \left(-\frac{90}{77}\right) = \frac{20}{11}$

即 b_8 可能為正，但若$a_1 > 0$時，$a_8 < 0$，故$a_8 < b_8$亦有可能

故選(1) (3)

第二部分：選填題(占 40 分)

A. 出自 1-1 數與式

解析：$\because \frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$　$\therefore k < 3\sqrt{31} < k+1$　$\therefore k^2 < 279 < (k+1)^2$

$\because k \in Z$　$\therefore k \in N$　$\therefore k = 16$

B. 出自 1-2 多項式

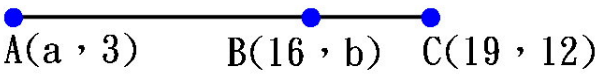
解析：$\because (a+bi)(2+6i) = -80$

$\therefore (2a-6b) + (6a+2b)i = -80$

$\therefore a，b \in R$　$\therefore \begin{cases} 2a-6b = -80 \\ 6a+2b = 0 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} a-3b = -40 \\ 3a+b = 0 \end{cases}$

$\therefore a = -4，b = 12$　$\therefore$數對$(a，b) = (-4，12)$

C. 出自 3-3 平面向量

解析： 

$\because$ A、B、C共線且 C 不在A、B之間且$\overline{AC}：\overline{BC} = 3：1$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$

$\therefore (19-a，9) = 3(3，12-b)$　$\therefore (19-a，9) = (9，36-3b)$

$\therefore \begin{cases} 19-a = 9 \\ 9 = 36-3b \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \end{cases}$　$\therefore a+b = 19$

D. 出自 3-3 平面向量

解析：設阿德第一天賣 x 公斤，第二天都 y 公斤，第三天賣 t 公斤

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+t=100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 40x+36y+32t=3720 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①知$x+y=100-t \cdots\cdots ③$

由②知$10x+9y=930-8t \cdots\cdots ④$

③$\times 10-$④得$y=70-2t=-2t+70$

$\because y=at+b$

$\therefore a=-2$，$b=70$

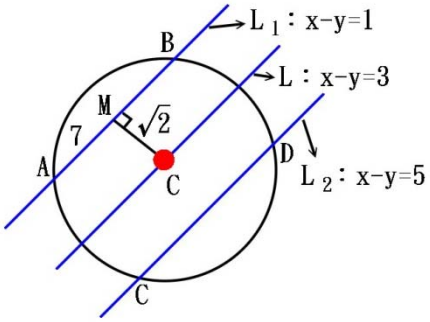
E. 出自 3-2 直線與圓

解析：$\because$圓與兩平行線L_1：$x-y=1$與L_2：$x-y=5$所截之弦

長相等，如右圖所示中$\overline{AB}=\overline{CD}=14$

圖心 C 在直線L：$x-y=3$上

令 M 為$\overline{AB}$之中點$\longrightarrow \overline{AM}=7$ 且 $\overline{CM}\perp\overline{AM}$



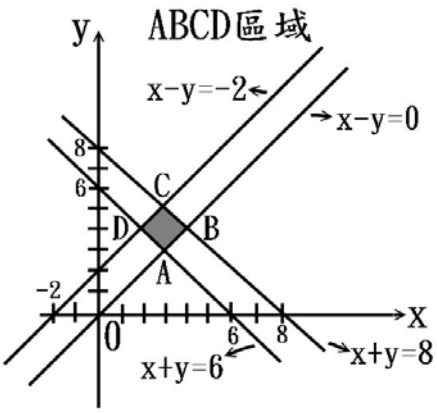
$\because \overline{CM}=d(L，L_1)=\frac{|3-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore$圓之半徑為 $r=\overline{CA}=\sqrt{7^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{51}$

$\therefore$圓的面積為 $\pi r^2=51\pi$

F. 出自 3-3 平面向量

解析：$\vec{\mu}+\vec{A}+\vec{B}\quad \vec{v}=x\vec{A}+y\vec{B}$



$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{A}+\vec{B})\cdot(x\vec{A}+y\vec{B})$

$=x|\vec{A}|^2+(x+y)\vec{A}\cdot\vec{B}+y|\vec{B}|^2$

又$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos 60^\circ=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=x\cdot 1^2+(x+y)\cdot 1+y\cdot 2^2$

$=2x+5y$

又不等式組$\begin{cases}6\le x+y\le 8\\ -2\le x-y\le 0\end{cases}$之圖形為如右之四邊形

其中$A(3，3)$，$B(4，4)$，$C(3，5)$，$D(2，4)$

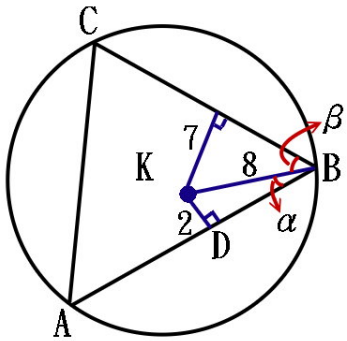
令 $f(x，y)=2x+5y$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(3，3)=21\\ f(4，4)=28\\ f(3，5)=31\\ f(2，4)=24\end{cases}$$

$\therefore 2x+5y$ 之最大值為 31，故 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ 之最大值為 31

G. 出自 3-1 三角

解析：令△ABC之外接圓圓心 K 在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$之投影點分別為 D、E



$\Rightarrow \overline{KB}=8$(外接圓半徑)

$\overline{KD}=2$，$\overline{KE}=7$

$\Rightarrow \overline{BD}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

$\overline{BE}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$

令$\angle KBD=\alpha$，$\angle KBE=\beta$

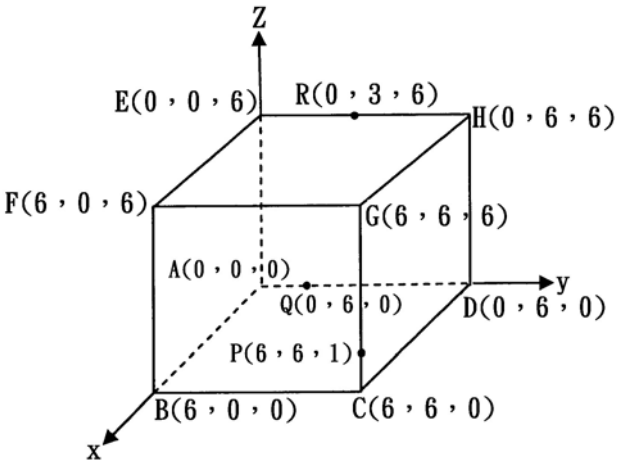
$\Rightarrow \sin\angle ABC=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{8}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{2\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{7}{8}$$
$$=\frac{16\sqrt{15}}{64}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

由正弦定律知$\overline{AC}=2R\sin\angle ABC$

$$=2\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=4\sqrt{15}$$

H. 出自 4-1 空間向量



解析：由題意知$A(0，0，0)$，$B(6，0，0)$

$C(6，6，0)$，$D(0，6，0)$，$E(0，0，6)$

$F(6，0，6)$，$G(6，6，6)$，$H(0，6，6)$

由題意知$P(6，6，1)$，$R(0，3，6)$

令$Q(0，b，0)$

$\Rightarrow$ 通過P，Q，R三點的平面有一法向量為

$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(-6，b-6，-1)\times(-6，-3，5)$

$$=\left(\begin{vmatrix} b-6 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} -6 & b-6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}\right)=(5b-33，36，6b-18)$$

由於通過P，Q，R三點的平面與直線 AG 不相交

$\therefore$直線 AG 與通過P，Q，R三點的平面平行

$\therefore\overrightarrow{AG}\perp\vec{n}$

$\therefore(6，6，6)\cdot(5B-33，36，6b-18)=0$

$\therefore 6(5b-33)+6\cdot 36+6(6b-18)=0$

$\therefore 5b-33+36+6b-18=0$

$\therefore 11b=15$

$\therefore b=\frac{15}{11}$

故 Q 點的 y 坐標為 $\frac{15}{11}$