陳宏澤 老師

師範大學數學研究所
師範大學數學系
國立基隆女中4年
曾任板中資優班老師29年
教學績優錄取美
國教育數學考查並在
漢華、瀚林、建宏出版社
出版高中數學講義多年

主講老師教學優點

教學資歷完整高中
數學教學達三十餘
年，對升大學數學
學測命題有長期深
入的研究，最能抓
住命題的核心；教
學的內容完全針對
學測的命題，而且
具細糜遺若能依照
老師的教授去執行
、學習數學學測的
成績肯定可獲高分
。

¤ 最新升大學學測及指考試題解析 ¤

一、單選題(占 24 分)

01. 出自 1-2 多項式

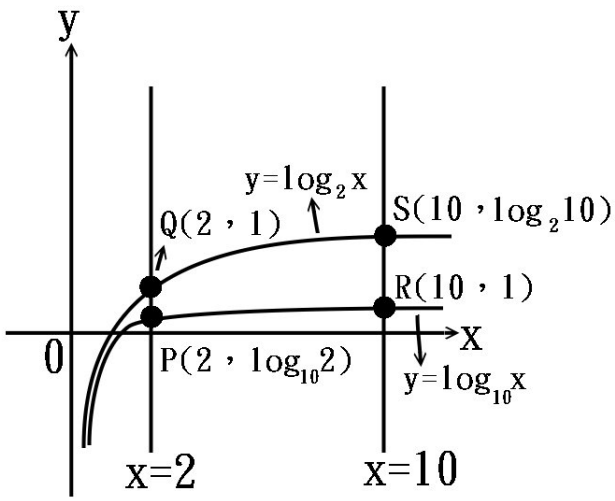
解析：$\because \frac{z-2}{z+2}=i \quad \therefore i(z+2)=z-2 \quad \therefore iz+2i=z-2$

$\therefore (1-i)z=2+2i \quad \therefore z=\frac{2+2i}{1-i}$

$\therefore |z|=\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|=\frac{|2+2i|}{|1-i|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$

故選(5)

02. 出自 1-3 指數與對數



解析：$P(2，\log_{10}2)$，$Q(2，1)$

$R(10，1)$，$S(10，\log_2 10)$

$\longrightarrow \overline{PQ}=1-\log_{10}2$ ，$\overline{RS}=\log_2 10-1$

$\longrightarrow \overline{PQ}+\overline{RS}=1-\log_{10}2+\log_2 10-1$

$=1-\log_{10}2+\frac{1}{\log_{10}2}-1$

$\doteqdot 1-0.3010+\frac{1}{0.3010}-1=-0.3010+3.3223$

$=3.0213$

$\therefore$四邊形PQSR的面積$=\frac{1}{2}(\overline{PQ}+\overline{RS})\cdot 8\doteqdot\frac{1}{2}\times 3.0213\times 8\doteqdot 12.0852$

故選(3)

03. 出自 2-3 機率

解析：袋中共有 8 顆球(編號為1~8各一顆)

從袋中任取兩球共有$C_2^8 = 28$種取法

X 的機率分布如下

X		P_k
1	12，13，14，15，16，17，18	$P_1 = \frac{7}{28} > \frac{1}{5}$
2	23，24，25，26，27，28	$P_2 = \frac{6}{28} > \frac{1}{5}$
3	34，35，36，37，38	$P_3 = \frac{5}{28} < \frac{1}{5}$
4	45，46，47，48	$P_4 = \frac{4}{28} < \frac{1}{5}$
5	56，57，58	$P_5 = \frac{3}{28} < \frac{1}{5}$
6	67，68	$P_6 = \frac{2}{28} < \frac{1}{5}$
7	78	$P_7 = \frac{1}{28} < \frac{1}{5}$
8		$P_8 = \frac{0}{28} < \frac{1}{5}$

$\therefore$滿足$P_k > \frac{1}{5}$的P_k 有 2 個，故選(2)

04. 出自 4-3 矩陣

解析：$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = ade + bcf$

考慮：滿足$p，q，r，u，v，w \in \{1，2，3，4，5，6\}$且$p，q，r，u，v，w$

皆相異且$p \times q \times r$ 為奇數且$u \times v \times w$ 為偶數的方法數

$p \times \underbrace{q \times r}$為奇數且$u \times \underbrace{v \times w}$為偶數

1，3，5 作直線排列且 2，4，6 作直線排列

∴方法數為 $3! \times 3! = 36$

∴$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$為奇數的機率

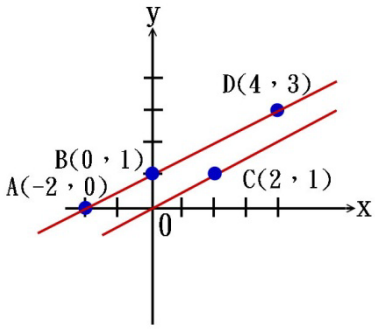
＝「ade 為奇數且 bcf 為偶數」的機率+「ade 為偶數且 bcf 為奇數的機率」

$= \frac{36}{6!} + \frac{36}{6!} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$

故選(2)

二、多選題(占 40 分)

05. 出自 3-2 直線與圓



解析：(1)✕：∵A，B，C不共線

(2)✕：∵A，B，D共線

∴沒有圓過A，B，D三點

(3)○：滿足條件的二次多項式函數的圖形的對稱軸恰為直線 $x = 1$

(4)○：$\begin{cases} ①A，B，C，D\ 不共線 \\ ②不共線的四個點，恰可決定一個三次多項式函數 \end{cases}$

(5)○：過A，B，D的直線與直線OC平行

此兩平行線的聯集包含A，B，C，D四個點

故選(3) (4) (5)

06. 出自 4-2 空間中的平面與直線

解析：E_1：$cx+y=c$　E_2：$cy+z=0$　E_3：$x+cz=1$

(1)○：∵ $(1，0，0)$滿足 $cx+y=c(0\cdot 1+0+0\cdot 0=c)$

亦滿足$cy+z=0(0\cdot 1+c\cdot 0+0=0)$

又滿足$x+cz=1(1+0\cdot 0+c\cdot 0=1)$

∴$(1，0，0)$是E_1，E_2，E_3 的一個交點

(2)○：∵E_1，E_2，E_3 有一個交點的 z 坐標是 1

$$\therefore\begin{cases} cx+y=c\cdots\cdots ① \\ cy+1=0\cdots\cdots ② \\ x+c=1\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由③知 $x=1-c$；由②知 $y=-\frac{1}{c}$ 代入①　得 $c(1-c)-\frac{1}{c}=c$

$\therefore -c^2=\frac{1}{c}$　$\therefore c^3=-1$　$\therefore c=-1$

∴E_1：$-x+y=-1$；E_2：$-y+1=0$；E_3：$x-1=1$

∴$(2，1，1)$顯然為 E_1，E_2，E_3 之共同的點之一

由(1)知$(1，0，0)$也是共同點之一

∴E_1，E_2，E_3 共線　∴E_1，E_2，E_3 有無窮多個交點

(3)×：由(2)知三平面皆相異　∴無兩平面重合

(4)×：由(2)知 $c=-1$

(5)○：E_1：$-x+y=-1$，E_2：$-y+z=0$，E_3：$x-z=1$

顯然地點$(3，2，2)$是E_1，E_2，E_3的一個交點

∴E_1，E_2，E_3有一個交點的 z 坐標為 2

故選(1) (2) (5)

07. 出自 3 甲-3 極限與函數；3 乙-3 極限與函數

解析：$f(x)=x^3-x^2-2x+1=(x-1)(x^2-2)-1$

(1)✕：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^2-2)+\frac{-1}{x-1}\right]=-1+\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{x-1}$

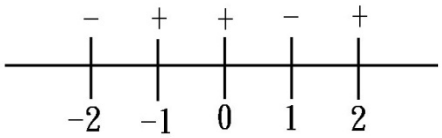
$\therefore$極限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ 不存在

(2)○：$\because f(0)=1$，$f(1)=-1$

$\therefore f(0)f(1)<0$

由勘根定理知 $f(x)=0$ 之實根至少有一個在 0 與 1 之間

(3)✕：由(2)知 $f(0)1$，$f(1)=-1$



又 $f(2)=8-4-4+1=1$

$f(-1)=-1-1+2+1=1$
$f(-2)=-8-4+4+1=-7$

由勘根定理及題意知$-2<a<-1$；$0<b<1$；$1<c<2$

$\therefore a$，a^2，a^3，…，a^n，…不為收斂數列

(4)○：由(3)知$0<b<1$

$\therefore b$，b^2，b^3，…，b^n，…為收斂數列

(5)✕：由(3)知$1<c<2$

$\therefore c$，c^2，c^3，…，c^n，…不為收斂數列

故選(2)(4)

08. 出自 3 甲-2 三角函數；3 乙-2 三角函數

解析：①$\because f(x)=|\sin x|+|\cos x|$

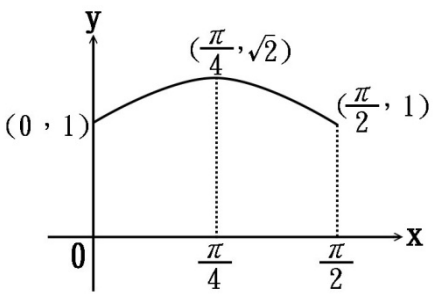
$$\therefore f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$
$$=|\cos x|+|-\sin x|$$
$$=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 的(最小正)週期為 $\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 僅作區間 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 內的圖形即可

②當 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 時

$$f(x)=|\sin x|+|\cos x|=\sin x+\cos x$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$



其圖形如右

(1)○：$\because f(x)=|\sin x|+|\cos x|$　$\therefore$ 對任意實數 x

$$f(-x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|$$
$$=|-\sin x|+|\cos x|$$
$$=|\sin x|+|\cos x|$$
$$=f(x)$$

(2)○：由前言②知 f 的最大值為$\sqrt{2}$

(3)×：由前言②知 f 的最小值為 1

(4)×：$\because 0<\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{9}<\frac{\pi}{4}$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{10}\right)<f\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

(5)×：由前言①知 f 的(最小正)週期為 $\frac{\pi}{2}$

故選(1)(2)

09. 出自 4-1 空間向量

解析：$\vec{u}=(a，b，0)$，$\vec{v}=(c，d，1)$，$a^2+b^2=c^2+d^2=1$

(1)○：z 軸正向有一方向向量為 $\vec{d}=(0，0，1)$

令 $\vec{v}$ 與 z 軸正向的夾角為 θ

$$\longrightarrow \cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{d}}{|\vec{v}||\vec{d}|}=\frac{(c，d，1)\cdot(0，0，1)}{\sqrt{c^2+d^2+1}\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{1+1}\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\theta=45°$

$\therefore\vec{v}$ 與 z 軸正向之夾角恆為定值

(2)✕：$\vec{u}\cdot\vec{v}=ac+bd$

由柯西不等式知$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$

$\therefore 1\cdot 1\geq(ac+bd)^2$　　$\therefore -1\leq ac+bd\leq 1$　　$\therefore\vec{u}\cdot\vec{v}$ 的最大值為 1

(3)○：令 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 之夾角為 ϕ

$$\longrightarrow \cos\phi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2+1}}=\frac{ac+bd}{\sqrt{1}\sqrt{1+1}}=\frac{ac+bd}{\sqrt{2}}$$

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\cos\phi\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\therefore 45°\leq\phi\leq 135°$

$\therefore\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 之夾角的最大值為$135°$

(4)✕：由柯西不等式

$(a^2+b^2)(d^2+(-c)^2)\geq(ad-bc)^2$

$\therefore 1\cdot 1\geq(ad-bc)^2$　　$\therefore -1\leq ad-bc\leq 1$

$\therefore ad-bc$ 是最大值為 1

即 $ad-bc$ 的值不可能為 $\frac{5}{4}$

(5)○：$\vec{u}=(a，b，0)$，$\vec{v}=(c，d，1)$

$\therefore \vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ d & 1 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)$

$=(b，-a，ad-bc)$

$\therefore |\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{b^2+(-a)^2+(ad-bc)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+(ad-bc)^2}\le\sqrt{1+1}$

$=\sqrt{2}$(由(4)知)

$\therefore |\vec{u}\times\vec{v}|$的最大值為$\sqrt{2}$

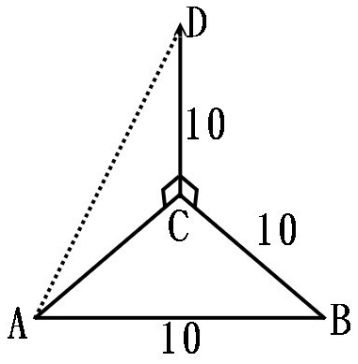
故選(1) (3) (5)

三、選填題(占 12 分)

A. 出自 3-1 三角

解析：$\because \sin\angle ABC=\frac{4}{5}$且$\angle ABC$為銳角

$\therefore \cos\angle ABC=\frac{3}{5}$



由餘弦定理知

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos\angle ABC$

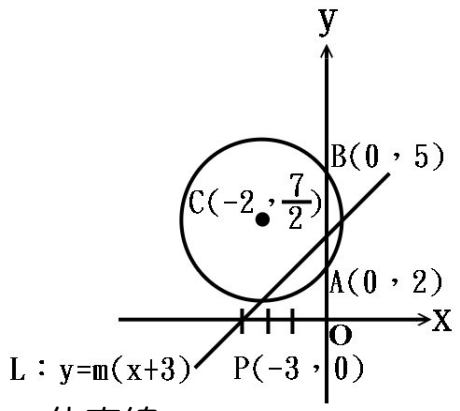
$=10^2+10^2-2\cdot10\cdot10\cdot\frac{3}{5}=80$

$\because$直線 CD 垂直平面 ABC

$\therefore \angle ACD=90°$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{80+10^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

B. 出自 3-2 直線與圓



解析：∵圓：$x^2+y^2+4x-7y+10=0$

∴圓：$(x+2)^2+(y-\frac{7}{2})^2=(\frac{5}{2})^2$

∴圓心為 $C(-2，\frac{7}{2})$，半徑為 $r=\frac{5}{2}$

$L：y=m(x+3)$表過$P(-3，0)$且斜率為m的直線

圓與 y 軸之交點為 $A(0，2)$與 $B(0，5)$且 L 與圓之兩交點位於不同的象限

∴L 與 y 軸之交點介於點 A 與點 B 之間

而 $m_{PA}=\frac{2-0}{0-(-3)}=\frac{2}{3}$，$m_{PB}=\frac{5-0}{0-(-3)}=\frac{5}{3}$

∴m 之範圍為 $\frac{2}{3}<m<\frac{5}{3}$

$\therefore a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{5}{3}$

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

一. 出自 3 甲-5 多項式函數的積分

解析：(1)說明：∵$p(x)$的各項係數均大於或等於 0

∴當 $x\geq 1$ 時 $p(x)\geq 0$ 恆成立

又當 $x\geq 1$ 時 $-1-x^2<0$ 恆成立

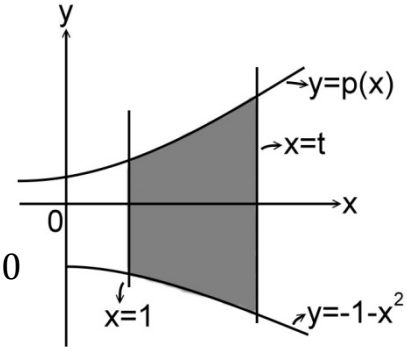
∴$p(x)>-1-x^2$ 對所有的 $x\geq 1$ 均成立

(2)解：當 $t\geq 1$ 時

$$\int_1^t(-1-x^2)dx=-x|_1^t-\frac{1}{3}x^3|_1^t$$

$$=-(t-1)-\frac{1}{3}(t^3-1)=-\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}$$

(3) 由題意知



$$\int_1^t [p(x)-(-1-x^2)]dx = t^4+t^3+t^2+t+C$$

$$\therefore \int_1^1 [p(x)-(-1-x^2)]dx = 1+1+1+1+C = 0$$

$$\therefore C = -4$$

(4) 由 (3) 知 $\int_1^t [p(x)-(-1-x^2)]dx = t^4+t^3+t^2+t-4$

$$\therefore \int_1^t p(x)dx + \int_1^t (1+x^2)dx = t^4+t^3+t^2+t-4$$

$$\therefore \int_1^t p(x)dx + \frac{1}{3}t^3 + t - \frac{4}{3} = t^4+t^3+t^2+t-4$$

$$\therefore \int_1^t p(x)dx = t^4 + \frac{2}{3}t^3 + t^2 - \frac{8}{3}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\int_1^t p(x)dx = \frac{d}{dt}(t^4 + \frac{2}{3}t^3 + t^2 - \frac{8}{3})$$

$$\therefore p(t) = 4t^3 + 2t^2 + 2t$$

$$\therefore p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 2x$$

二. 出自 4-3 矩陣

解析：(1) 由題意知 $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$$\therefore M\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad \therefore M = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

(2) $A(1，0)$，$B(0，1)$，令 $C(a，b)$

$\Rightarrow$ △ABC 之重心為 $G(\frac{1+a}{3}，\frac{1+b}{3})$

$$M\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}\\\frac{1+b}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}\\\frac{1+b}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{a-b}{3}\\\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3}\end{bmatrix} \cdots ①$$

$$M\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-b\\\sqrt{2}a+\sqrt{2}b\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

由②知 $C'(a-b，\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$

又 $A'(1，\sqrt{2})$，$B'(-1，\sqrt{2})$

$\therefore \triangle A'B'C'$ 的重心為 $G'(\frac{a-b}{3}，\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3})$

由①知M將$\triangle ABC$ 的重心映射到點 $(\frac{a-b}{3}，\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3})$

恰為$\triangle A'B'C'$ 的重心，故得證

(3) $\triangle A'B'C'$ 的面積 $= |\det M| \cdot \triangle ABC$ 的面積

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{matrix} \right\| \cdot 3 = 2\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2}$$

$\therefore \frac{1}{2}\overline{A'B'} \cdot d\left(C'，\overleftrightarrow{A'B'}\right) = 6\sqrt{2}$

$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\left(C'，\overleftrightarrow{A'B'}\right) = 6\sqrt{2}$

$\therefore d\left(c'，\overleftrightarrow{A'B'}\right) = 6\sqrt{2}$

$\therefore C'$ 到直線 $A'B'$ 的距離為 $6\sqrt{2}$