陳宏澤 老師

師範大學數學研究所
師範大學數學系
國立基隆女中4年
曾任板中資優班老師29年
教學績優錄取美
國教育數學考查並在
漢華、瀚林、建宏出版社
出版高中數學講義多年

主講老師教學優點

教學資歷完整高中
數學教學達三十餘
年，對升大學數學
學測命題有長期深
入的研究，最能抓
住命題的核心；教
學的內容完全針對
學測的命題，而且
具細糜遺若能依照
老師的教授去執行
、學習數學學測的
成績肯定可獲高分
。

¤ 最新升大學學測及指考試題解析 ¤

第壹部分：選擇題

一、單選題：(占 30 分)

01. 出自 3 甲-5 多項式函數的積分

解析：$\because f(x)=x(x-1)(x^3-2)$

$\therefore \int_0^a f'(x)dx = x(x-1)(x^3-2)\Big|_0^a = a(a-1)(a^3-2)$

$= a(a-1)\left(a-\sqrt[3]{2}\right)(a^2+\sqrt[3]{2}a+\sqrt[3]{4})$

$\therefore$滿足 $\int_0^a f'(x)dx=0$ 之實數 a 有 3 個，分別為 0，1 與$\sqrt[3]{2}$

故選(3)

02. 出自 2-3 機率

解析：所求$=\frac{0.35\times0.4}{0.15\times0.6+0.35\times0.4+0.5\times0.8}=\frac{0.14}{0.09+0.14+0.4}=\frac{0.14}{0.63}=\frac{2}{9}$

故選(1)

03. 出自 2-3 機率

解析：由題意知$\log_2 a+\log_4 a+\log_8 a=1$

$\therefore \log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 a+\frac{1}{3}\log_2 a=1$

$\therefore \frac{11}{6}\log_2 a=1$

$\therefore \log_2 a=\frac{6}{11}$

即$P_A=\frac{6}{11}$，故選(2)

04. 出自 4-3 矩陣

解析：令$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$，$\triangle = \det A$

$$\Rightarrow a' = \frac{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}{\triangle}，b' = \frac{-\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}}{\triangle}，c' = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{\triangle}$$

$$d' = \frac{-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}{\triangle}，e' = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}{\triangle}，f' = \frac{-\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\triangle}$$

$$g' = \frac{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}{\triangle}，h' = \frac{-\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}}{\triangle}，i' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}{\triangle}$$

令$B=\begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = \det A = \triangle$

$$\therefore B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{\triangle} & \frac{-\begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix}}{\triangle} & \frac{\begin{vmatrix} h & i \\ b & c \end{vmatrix}}{\triangle} \\ \frac{-\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\triangle} & \frac{\begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix}}{\triangle} & \frac{-\begin{vmatrix} g & i \\ a & c \end{vmatrix}}{\triangle} \\ \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}{\triangle} & \frac{-\begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix}}{\triangle} & \frac{\begin{vmatrix} g & h \\ a & b \end{vmatrix}}{\triangle} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c' & a' & b' \\ f' & d' & e' \\ i' & g' & h' \end{bmatrix}$$

故選(5)

05. 出自 1-3 指數與對數

解析：①由算幾不等式知

$$K = 9^x + 3^y \geq 2\sqrt{9^x \cdot 3^y} = 2\sqrt{3^{2x} \cdot 3^y} = 2\sqrt{3^{2x+y}}$$

$$= 2\sqrt{3^3} = 6\sqrt{3}$$

$\therefore K$ 的最小值為 $6\sqrt{3}$

②當 $x \longrightarrow \infty$ 時，此時 $9^x \longrightarrow \infty$，$3^y \longrightarrow 0$

$\therefore K \longrightarrow \infty$，即 K 沒有最大值，故選(4)

二、多選題：(占 32 分)

06. 出自 3-1 三角

解析：$\because x^2 - a = 0$ 之兩根為$\sin\theta$與$\cos\theta$

$$\therefore \begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = 0 \cdots\cdots ① \\ \sin\theta\cos\theta = -a \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(1) ✕：由①知$\sin\theta = -\cos\theta$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -1$

(2) ○：$\because 0 \le \theta < 2\pi$且$\tan\theta = -1$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \theta + \frac{\pi}{4} = \pi$ 或 2π

$\therefore \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0$

(3) ○：$\because \theta = \frac{3\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$

$\therefore 2\theta = \frac{3\pi}{2}$或$\frac{7\pi}{2}$

$\therefore \sin 2\theta = -1$

(4) ○：由①知$-a = \frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{-1}{2}$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

(5) ✕：滿足題設之 θ 有兩個，分別為 $\frac{3\pi}{4}$與 $\frac{7\pi}{4}$

故(2) (3) (4)

07. 出自 3-3 平面向量

解析：(1)○：∵G 為△ABC 的重心且$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$

∴O、G、D 三點共線

(2)×：由(1)知$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OG}$

(3)○：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=3\overrightarrow{OD}-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OD}$

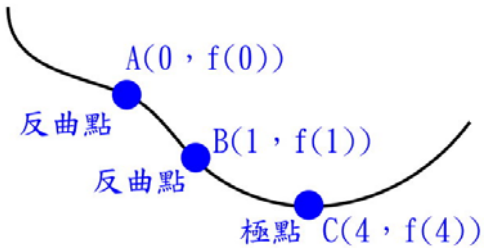
(4)○：三角形之重心必在形內

(5)×：D 可能位於△ABC 之內部

故選(1) (3) (4)

08. 出自 3 甲-4 多項式函數的微分

解析：由題意知 $y=f(x)$之略圖如右



(1)×：當 $1<x<4$ 時

切線之斜率遞增

$\therefore f'(x)$ 遞增

$\therefore f'(2)<f'(3)$

(2)○：由圖知$f(x)$在 $x=4$ 時有最小值 $f(4)$

(3)×：$y=f(x)$ 之圖形有兩個反曲點

(4)×：實係數三次多項式函數的圖形不可能有兩個反曲點

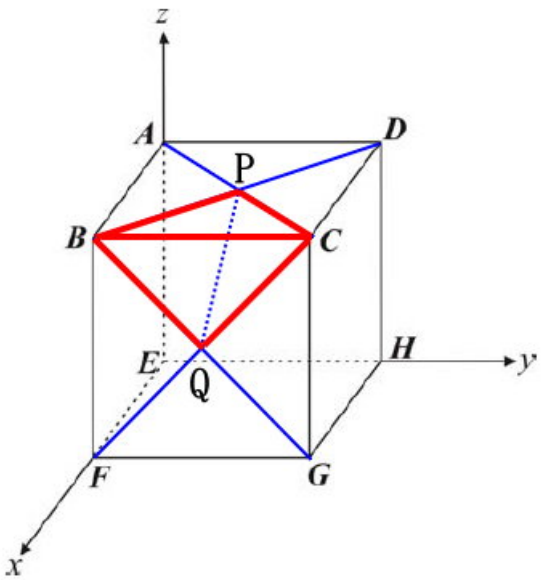
∴n 不可能為 3

(5)○：由圖知當 $x \longrightarrow \infty$ 時 $f(x)$ 也會趨近 ∞

$\therefore$ $f(x)$的最高次項係數必為正

故選(2) (5)

09. 出自 4-2 空間中的平面與直線



解析：Ω 恰為如右圖中之四面體$Q-BCP$

(1)○：Ω 有一頂點 P(1，1，2)

(2)○：$P(1，1，2)$，$Q(2，1，1)$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=(1，0，-1)$

$\therefore \Omega$ 有一稜線 PQ

其一方向向量為$(1，0，-1)$

(3)○：Ω 的四個面中，PBC 面與 BCQ 面互相垂直

(4)✕：Ω 之四個面中，BPQ 面與 PCQ 面為正三角形。

(5)✕：Ω 之體積 $=\frac{1}{3}\triangle BCP$ 之面積 × "Q 至平面 BCP 的距離"

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

故選(1) (2) (3)

三、選填題：(占 14 分)

A. 出自 4-2 空間中的平面與直線

解析：$\because \begin{cases} ax+3y+5z=b \\ y+cz=0 \\ 2y+dz=e \end{cases}$ 之解的圖形是坐標空間中包含 x 軸的一個平面

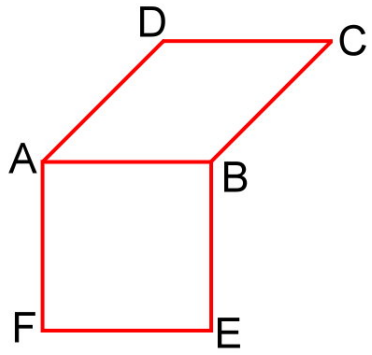
$\therefore$ 三平面 E_1：$ax+3y+5z=b$，E_2：$y+cz=0$，E_3：$2y+dz=e$ 重合

$\therefore a=0$ 且 $\frac{3}{1}=\frac{5}{c}$ 且 E_1 過原點 $0(0，0，0)$

$\therefore a=0$，$b=0$，$c=\frac{5}{3}$

B. 出自 4-1 空間向量

解析：顯然地 $\angle CAD=\angle CBE$



設 $\angle CAD=\angle CBE=\theta$

$\because \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=11$

$\therefore |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AF}|\cos\theta=11$

$\therefore 4\cdot 4\cdot\cos\theta=11$

$\therefore \cos\theta=\frac{11}{16}$

由餘弦定理知 $\overline{CE}=\sqrt{4^2+4^2-2\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{11}{16}}=\sqrt{10}$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\cos\angle CAE=4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{32+32-10}{2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}=27$

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

一. 出自 3 甲-5 多項式函數的積分

解析：(1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^4}=5$

$\therefore f(n)$為四次多項式，即 f 的次數為 4

令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^4+bn^3+cn^2+dn+e}{n^4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(a+b\cdot\frac{1}{n}+c\cdot\frac{1}{n^2}+d\cdot\frac{1}{n^3}+1\cdot\frac{1}{n^4})$

$=a \quad \therefore a=5$

$\therefore$ f 之最高次項係數為 5

(2) 設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

$\therefore f(x)$可被 x 整除，即 $a_0=0$

$\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

$\therefore f(x)$在 $x=0$ 處之切線的斜率為 0，切點為$\left(0，f(0)\right)=(0，0)$

$\therefore f(x)$在 $x=0$ 時的切線方程式為 $y-0=3(x-0)$

即 $3x-y=0$

(3) $\because$ f 滿足(1)與(2)之假設

$\therefore$可令 $f(x)=5x^4+bx^3+cx^2+dx$

$\Rightarrow f'(x)=20x^3+3bx^2+2cx+d$

$f''(x)=60x^2+6bx+2c$

$\therefore f''(0) = 2 \quad \therefore 2c = 2 \quad \therefore c = 1$

$\therefore f(x) = 5x^4 + bx^3 + x^2 + dx$

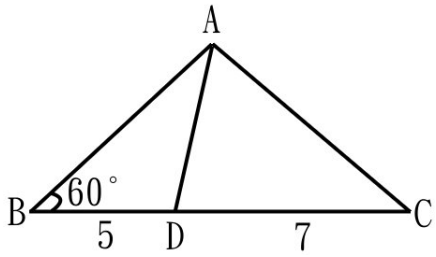
$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(5x^4 + bx^3 + x^2 + dx)dx$$

$$= x^5\Big|_{-1}^{1} + \frac{b}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} + \frac{d}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 2 + 0 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{8}{3}$$

二. 出自 3-1 三角

解析：(1) 由正弦定律知



$$\frac{\overline{AD}}{\sin 60°} = \frac{5}{\sin\frac{A}{2}} \text{ 且 } \frac{\overline{AD}}{\sin C} = \frac{7}{\sin\frac{A}{2}}$$

$\therefore 5\sin 60° = 7\sin C$

$\therefore \frac{5\sqrt{3}}{2} = 7\sin C$

$\therefore \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$，即 $\sin\angle ACB = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

(2) 由 (1) 知 $\cos C = \frac{11}{14}$

$\therefore \sin\angle BAC = \sin(120° - \angle C)$

$$= \sin 120°\cos\angle C - \cos 120°\sin\angle C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11}{14} - (-\frac{1}{2})\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

(3) 由正弦定律知 $\frac{\overline{AB}}{\sin\angle C} = \frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot 12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{15}{2}$$