陳宏澤 老師

師範大學數學研究所
師範大學數學系
國立基隆女中4年
曾任板中資優班老師29年
教學績優錄取美
國教育數學考查並在
漢華、瀚林、建宏出版社
出版高中數學講義多年

主講老師教學優點

教學資歷完整高中
數學教學達三十餘
年，對升大學數學
學測命題有長期深
入的研究，最能抓
住命題的核心；教
學的內容完全針對
學測的命題，而且
具細糜遺若能依照
老師的教授去執行
、學習數學學測的
成績肯定可獲高分
。

¤ 最新升大學學測及指考試題解析 ¤

一、單選題：(占 60 分)

01. 出自 1-3 指數與對數

解析：$\because \log b^n = n\log b$

$\log\left(2^{(3^5)}\right) = 3^5\log 2$

故選(5)

02. 出自 4-1 空間向量

解析：$A(5，0，12)$，$B(-5，0，12)$

令$P(a，b，0)$

$\because \overline{PA} = \overline{PB} = 13$

$\therefore (a-5)^2 + b^2 + (0-12)^2$

$= (a+5)^2 + b^2 + (0-12)^2$
$= 13^2$

$\therefore \begin{cases} a^2 + b^2 - 10a + 169 = 169 \cdots\cdots ① \\ a^2 + b^2 + 10a + 169 = 169 \cdots\cdots ② \end{cases}$

②−①得$20a = 0$

$\therefore a = 0$代入①

得$b = 0$

$\therefore$ P 之坐標為$(0，0，0)$

故選(4)

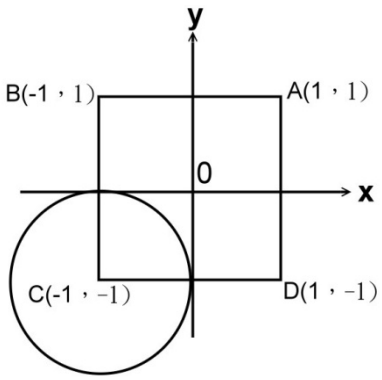
03. 出自 3-2 直線與圓

解析：圓Γ：$x^2+y^2+2x+2y+1=0$

$\equiv (x+1)^2+(y+1)^2=1$

$\therefore \Gamma$ 表以$C(-1，-1)$

為圓心且半徑是 1 的圓



以$(1，1)$，$(-1，-1)$，$(-1，-1)$，$(1，-1)$為頂點的正方形為如右之正方形 ABCD

由右圖知兩圖形之交點個數為 2

故選(2)

04. 出自 1-2 多項式

解析：$|4x-12|\le 2x$

$\equiv -2x\le 4x-12\le 2x$ 且 $x\ge 0$

$$\therefore \begin{cases} 6x\ge 12 \\ 2x\le 12 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le 6 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

$\therefore 2\le x\le 6$

$\therefore$長度為 4，故選(4)

05. 出自 2-2 排列組合

解析：$a+b\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^6$

$=C_0^6\cdot 1^6+C_1^6\cdot 1^5\cdot\sqrt{2}+C_2^6\cdot 1^4\cdot(\sqrt{2})^2+C_3^6\cdot 1^3\cdot(\sqrt{2})^3+C_4^6\cdot 1^2\cdot(\sqrt{2})^4$

$+C_5^6\cdot 1\cdot(\sqrt{2})^5+C_6^6\cdot(\sqrt{2})^6$

$=(C_0^6+C_2^6\cdot 2+C_4^6\cdot 4+C_6^6\cdot 8)+(C_1^6+C_3^6\cdot 2+C_5^6\cdot 2^2)\sqrt{2}$

$\because$a，b 為整數

$\therefore b=C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6$

故選(2)

06. 2-3 機率

解析：令 A 表患者的疾病為第一類型的事件

B 表患者的疾病為第二類型的事件

S_k 表第 k 次療程成功的事件

L_k 表第 k 次療程失敗的事件

$\longrightarrow P(L_1)=P(A)\times P(L_1|A)+P(B)\times P(L_1|B)$
$=0.7\times 0.3+0.3\times 1=0.51$
$P(L_1\cap S_2)=P(A)\times P(L_1|A)\times P(S_2|A\cap L_1)$
$=0.7\times 0.3\times 0.7=0.147$

$\therefore$所求$=P(S_2|L_1)$

$$=\frac{P(L_1\cap S_2)}{P(L_1)}=\frac{0.147}{0.51}\doteqdot 0.288$$

$\therefore$所求最接近選項(2)之 0.3

故選(2)

二、多選題(占 30 分)

07. 出自 4-4 二次曲線

解析：(1)○：(1，1)為Γ_1：$y = x^2$ 之格子點

(2)×：$\because 3y = 9x + 1$

$\therefore 3(y - 3x) = 1$

$\because x，y \in z$

$\therefore 3(y - 3x)$為 3 的倍數

$\therefore$1 為 3 的倍數

(不合)

(3)○：$(-3，1)$為Γ_3：$y^2 = -x - 2$ 上之格子數

(4)×：Γ_4：$x^2 + y^2 = 3$ 上無格子點

(5)○：(3，1)為Γ_5：$\log_9 x + \frac{1}{2}$上之格子點

故選(1) (3) (5)

08. 出自 1-1 數與式

解析：(1)○：$\sqrt{13} = \sqrt{12.25} = 3.5$

(2)×：$\sqrt{13} > \sqrt{12.96} = 3.6$

(3)×：$(\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$

$\therefore 13 < (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2$

$\therefore \sqrt{13} < \sqrt{3} + \sqrt{10}$

$\therefore \sqrt{13} - \sqrt{3} < \sqrt{10}$

(4)○：$(\sqrt{13}+\sqrt{3})^2=16+2\sqrt{39}$

$\therefore(\sqrt{13}+\sqrt{3})^2>16$

$\therefore\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$

(5)×：$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{10}<\frac{\sqrt{16}+\sqrt{4}}{10}=\frac{4+2}{10}=0.6$

故選(1) (4)

09. 出自 3-3 平面向量

解析：(1)×：$(-3，6)+r\vec{v}$

$=(-3，6)+r(1，-2)$

$=(r-3，-2r+6)$

當 $r-3>0$ 且 $-2r+6>0$ 時 $r>3$ 且 $r<3$(不合)

(2)○：$(-3，6)+r\vec{v}$

$=(-3，6)+r(1，-1)$

當 $r-3>0$ 且 $-r+6>0$時$r>3$ 且 $r<6$

即$3<r<6$ (合)

(3)○：$(-3，6)+r\vec{v}$

$=(-3，6)+r(0.001，0)$

$=(0.001r-3，6)$

當 $0.001r-3>0$時

$r>3000$(合)

(4)○：$(-3，6)+r\vec{v}$

$=(-3，6)+r(0.001，1)$

$=(0.001r-3，r+6)$

當$0.001r-3>0$ 且 $r+6>0$ 時 $r>3000$ 且 $r>-6$

即 $r>3000$(合)

(5)×：$(-3，6)+r\vec{v}$

$=(-3，6)+r(-0.001，1)$

$=(-0.001r-3，r+6)$

當$-0.001r-3>0$ 且 $r+6>0$ 時 $r<-3000$ 且 $r>-6$(不合)

故選(2) (3) (4)

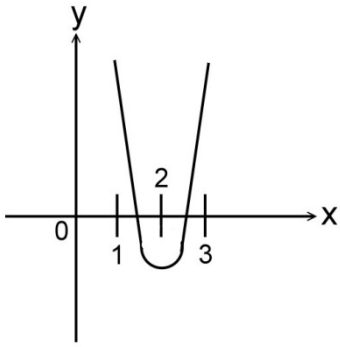
10. 出自 1-2 多項式

解析：(1)×：∵$f(x)$為實係數二次多項式

且$f(1)>0$，$f(2)<0$，$f(3)>0$

∴①$f(x)$之圖形為開口向上的拋物線

其部分圖形如右



②$f(x)$之領導係數為正

(2)×：∵$f(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$

∴$g(x)$之領導係數為正

∴$g(x)$之圖形為開口向上的拋物線

(3)○：$g(1) = f(1) + (1-2)(1-3)$

$= f(1) + 2 > f(1)$

(4)○：$g(1) = f(1) + (1-2)(1-3)$

$= f(1) + 2 > 0$

$g(2) = f(2) + (2-2)(2-3)$

$= f(2) < 0$

由勘根定理知$g(x) = 0$在 1 與 2 之間恰有一個實根

(5)×：$\because \alpha$ 為 $f(x) = 0$ 的最大實根

$\therefore f(\alpha) = 0$ 且 $2 < \alpha < 3$

$\therefore (\alpha - 2)(\alpha - 3) < 0$

$\therefore g(\alpha) = f(\alpha) + (\alpha - 2)(\alpha - 3) < 0$

故選(3) (4)

11. 出自 2-1 數列與級數

解析：令等差數列a_1，a_2，a_3，…之公差為 d

$\because a_1 = 1$

$\therefore a_n = 1 + (n-1)d$

(1)×：取$d = \frac{-1}{100}$滿足

$$a_{100} = 1 + 99d = 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100} > 0$$

$$a_{1000} = 1 + 999d = 1 - \frac{999}{100} = -\frac{899}{100} < 0$$

$\therefore$當 $a_{100} > 0$時a_{1000}不一定大於 0

(2)○：當 $a_{100} < 0$時，$1 + 99d < 0$

$\therefore d < -\frac{1}{99}$

$\therefore a_{1000} = 1 + 999d < 1 - \frac{999}{99} < 0$

(3)○：當$a_{1000} > 0$時，$1 + 999d > 0$

$\therefore d > -\frac{1}{999}$

$\therefore a_{100} = 1 + 99d > 1 - \frac{99}{999} > 0$

(4)×：取$d = -\frac{1}{200}$，滿足

$$a_{1000} = 1 + 999d = 1 - \frac{999}{200} < 0$$

$$a_{100} = 1 + 99d = 1 - \frac{99}{200} > 0$$

$\therefore$當$a_{1000} < 0$時，a_{100}不一定小於 0

(5)○：$a_{1000} - a_{10} = 990d = 10 \times 99d = 10(a_{100} - a_1)$

故選(2) (3) (5)

12. 出自 2-4 數據分析

解析：(1)○：由表知40~44歲的失業率顯然是最高的

(2)×：無法確定

(3)×：$\because$40~44歲的勞動力人數不等於45~49歲的勞動力人數

$\therefore$40~49歲的失業率不等於 $(\frac{13.17+7.08}{2})\%$

(4)○：令35~39 歲的失業人數為 x ，勞動力人數為 a ，令40~44歲的失業人數為 y，勞動力為 b

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{9.8}{100}，\frac{y}{b} = \frac{13.17}{100}$$

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{12.66}{100}$$

$\therefore \frac{\frac{9.8}{100}a+\frac{13.17}{100}b}{a+b} = \frac{12.66}{100}$

$\therefore \frac{9.8a+13.17b}{a+b} = 12.66$

$\therefore 9.8a + 13.17b = 12.66a + 12.66b$

$\therefore 0.51b = 2.86a$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{0.51}{2.86} < 1$

$\therefore a < b$

∴35~39歲的勞動力人數少於40~44歲的勞動力人數

(5)✕：當40~44歲的失業率降低時，45~49歲的失業率也可能會降低

故選(1)(4)

第貳部分：選填題(占 40 分)

A. 出自 3-2 直線與圓

解析：由題意知$\overline{CD} \perp \overline{OD}$於 D

$\therefore \overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OD}^2 = 26^2 - 24^2 = 100$

$\therefore \overline{CD} = 10$

$\triangle OAB \sim \triangle OCD$

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$

$\therefore \frac{\overline{AB}}{24} = \frac{10}{26}$

$\therefore \overline{AB} = \frac{24\times10}{26} = \frac{120}{13}$

B. 出自 4-4 二次曲線

解析：由題意知

直線L：$y=ax+b$ 為Γ_1：$y=x^2$的切線

亦為Γ_2：$y=(x-2)^2+12$ 的切線

$\therefore\begin{cases}ax+b=x^2\text{恰有一實根}\\ax+b=(x-2)^2+12\text{ 恰有一實根}\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x^2-ax-b=0\text{ 恰有一實根}\\x^2-(a+4)x+16-b=0\text{ 恰有一實根}\end{cases}$

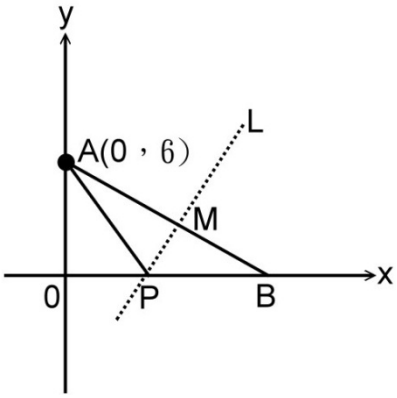
$\therefore\begin{cases}a^2+4b=0\\(a+4)^2-4(16-b)=0\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a^2+4b=0\cdots\cdots\cdots\cdots①\\a^2+4b+8a-48=0\cdots②\end{cases}$

②−①得$8a-48=0$　$\therefore a=6$代入①　得$b=-9$

C. 出自 3-2 直線與圓

解析：建立平面坐標系



令筆直公路為 x 軸

$A(0，6)$，B 在 x 軸正向上

$\because\overline{AB}=12$

$\therefore\overline{OB}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

$\therefore B(6\sqrt{3}，0)$

$\overleftrightarrow{AB}$ 之斜率為 $\frac{6-0}{0-6\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{AB}$ 之中點為$M(3\sqrt{3}，3)$

$\therefore\overline{AB}$ 之垂直平分線為L：$\sqrt{3}x-y=6$

$\therefore$超級市場之位置為$P(2\sqrt{3}，0)$

$\therefore$超級市場與 A 的距離為$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OP}^2}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$

D. 出自 4-2 空間中的平面與直線

解析：$A(2，0，0)$，$B(3，4，2)$，$C(-2，4，0)$，$D(-1，3，1)$

$\overrightarrow{CD}=(1，-1，1)$

$\overleftrightarrow{CD}：\begin{cases}x=-2+t\\y=4-t\\z=t\end{cases}$，t 為任意實數

$\because$P 在直線 CD 上

$\therefore$令$P(-2+t，4-t，t)$，$t\in R$

$\Longrightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=(4-t，-4+t，-t)\cdot(5-t，t，2-t)$

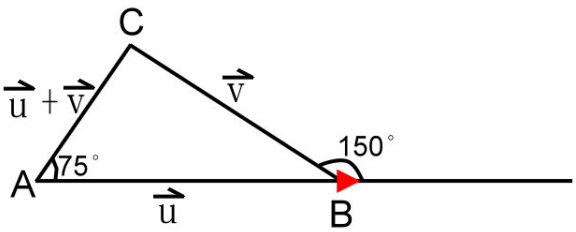
$=(4-t)(5-t)+(-4+t)\times t+(-t)\times(2-t)$

$=3t^2-15t+20$，$t\in R$

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 之最小可能值為 $\frac{4\cdot3\cdot20-(-15)^2}{4\cdot3}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

E. 出自 3-3 平面向量

解析：如右圖



$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{v}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$

$\because|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$且$\angle BAC=75°$

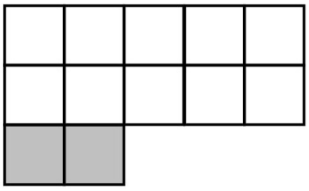
$\therefore\angle ACB=75°$

$\therefore\angle ABC=30°$

$\therefore \vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 之夾角為$150°$

$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 150° = 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

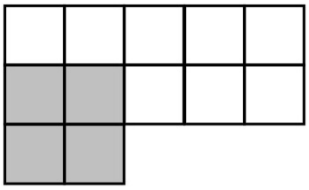
F. 出自 2-2 排列組合

解析：(1) 

①恰有一個 ：方法數為 3

②恰有三個 ：方法數為 4

③恰有五個 ：方法數為 1

(2) 

①恰有三個 ：方法數為 2

②恰有五個 ：方法數為 1

故用 6 塊瓷磚舖滿房間地面的方法有$3+4+1+2+1=11$ 種

G. 出自 4-3 矩陣

解析：$\because \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$是一個轉移矩陣

$\therefore a+c=1$ 且 $b+d=1$

$\therefore c=1-a$ 且 $b=1-d$

$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的行列式值為$\frac{5}{8}$

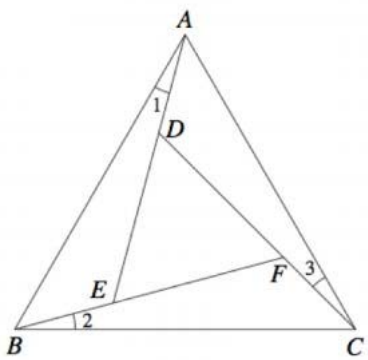
$\therefore ad-bc=\frac{5}{8}$

$\therefore ad-(1-d)(1-a)=\frac{5}{8}$

$\therefore ad-1+d+a-ad=\frac{5}{8}$

$\therefore a+d=1+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$

H. 出自 3-1 三角



解析：$\triangle ABC$為正三角且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CAD$

$\therefore \triangle DEF$ 是一個正三角形

於$\triangle ABE$中

$\overline{AB}=1$，$\angle ABE=45°$，$\angle AEB=120°$，$\angle BAE=15°$

$\therefore$由正弦定理知$\frac{\overline{AB}}{\sin 120°}=\frac{\overline{AE}}{\sin 45°}=\frac{\overline{BE}}{\sin 15°}$

$\therefore \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\overline{BE}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$\therefore \overline{AE}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\overline{\mathrm{BE}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{AE}} - \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AE}} - \overline{\mathrm{BE}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

故正三角形DFE的邊長為$\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$